Drgania swobodne układu o wielu stopniach swobody

W przypadku układów o wielu stopniach swobody równania możemy zapisać w postaci macierzowej

macierz mas

macierz sztywności

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Rozwiązanie powyższego równania zakładamy w postaci harmonicznej

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_0} sin(\omega_{\ 0} t)$$

więc

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q_0} \omega_{\ 0} cos(\omega_{\ 0} t)$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{q_0} \omega_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} sin(\omega_{\ 0} t)$$

Po podstawieniu dostaniemy

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{M}\right)\cdot\boldsymbol{q}_{\mathbf{0}}sin(\omega\,_{0}t)=\mathbf{0}$$

To równanie ma być prawdziwe dla dowolnej chwili czasu, więc

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{M}\right)\cdot\boldsymbol{q}_{\mathbf{0}}=\mathbf{0}$$

Ten układ równań ma rozwiązania niezerowe, gdy spełniony jest warunek

$$\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{K}-\omega_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{M}\right)=\boldsymbol{det}(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=0$$

Dostaniemy wielomian n-tego stopnia, z którego wyznaczymy „n” częstości drgań własnych.

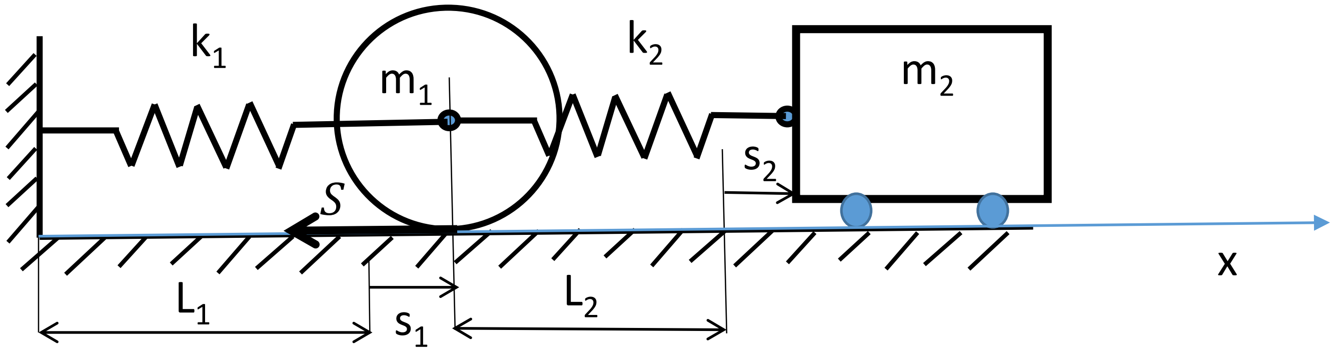
Mając do dyspozycji wyznaczone „n” częstości drgań własnych,
dla każdej z $\boldsymbol{\omega_{0i}}$ możemy wyznaczyć wektor drgań własnych $\mathbf{q_{0i}}$.

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega_{\boldsymbol{0i}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{M}\right) \cdot \boldsymbol{q_{0i}} = \boldsymbol{0}$$

$\mathbf{q_{0i}}$ **-** obliczamy z dokładnością do stałego mnożnika, bowiem każda wielokrotność właściwego wektora spełnia to równanie, dlatego najczęściej normuje się wektor tak, aby pierwsza składowa wektora lub największa przyjęła wartość 1.

Wektor własny odpowiadający odpowiedniej częstości drgań własnych
pokazuje jak układ będzie się zachowywał (drgał) przy danej częstości drgań własnych
(pokaże także względne wartości amplitud)

Przykład obliczeniowy



Równania wyznaczyliśmy wcześniej

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + k_1 s_1 - k_2 s_2 = 0 \\ m_2(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + k_2 s_2 = 0 \end{cases}$$

Zapiszmy równania w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

macierz bezwładności (mas) macierz sztywności

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}) = 0 \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \omega_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}}$$

$$\boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1\lambda & 0 \\ m_2\lambda & m_2\lambda \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix} k_1 - \frac{3}{2}m_1\lambda & -k_2 \\ -m_2\lambda & k_2 - m_2\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\frac{3}{2}m_1 m_2 \lambda^2 - \left(m_2 k_1 + \frac{3}{2}k_2 m_1 + k_2 m_2\right)\lambda + k_1 k_2 = 0$$

Rozwiązanie:

$$\lambda_{12} = \frac{3k_2m_1 + 2k_1m_2 + 2k_2m_2 \pm \sqrt{-24k_1k_2m_1m_2 + (3k_2m_1 + 2k_1m_2 + 2k_2m_2)^{\,2}}}{6m_1m_2}$$

$$\omega_{\mathbf{012}}^{\mathbf{2}} = \lambda_{12}$$

Podstawmy konkretne wartości parametrów

m_1=2 [kg], m_2=3 [kg], k_1=10000 [N/m], k_2=20000 [N/m]

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 10000 & -20000 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=0$$

$$\boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix}10000 & -20000\\ 0 & 20000\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 3\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix}10000 & -20000\\ 0 & 20000\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\lambda & 0\\ 3\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix}10000-3\,\lambda & -20000\\ -3\lambda & 20000-3\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$(10000-3\,\lambda)(20000-3\lambda)-60000\lambda=2\cdot 10^8-150000\lambda+9\lambda^2=0$$

$\lambda_1 =$ 1461.49 $\quad \omega_{01}=\sqrt{\lambda_1}=38{,}23 \quad$ $\lambda_2 =$ 15205.2 $\quad \omega_{02}=\sqrt{\lambda_2}=123.31$

Następnie należy wyznaczyć wektory drgań własnych

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{\boldsymbol{0i}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{M}\right)\cdot\boldsymbol{q_{0i}}=\boldsymbol{0}$$

dla ω_{01}

$$\begin{bmatrix}10000-3\,\lambda_1 & -20000\\ -3\lambda_1 & 20000-3\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{011}\\ q_{012}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

przyjmujemy $\quad q_{011}=1$

$$\begin{bmatrix} 10000 - 3 \cdot\ 1461.49 & -20000 \\ -3 \cdot 1461.49 & 20000 - 3 \cdot 1461.49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5555.53 & -20000 \\ -4444.47 & 15555.53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z pierwszego równania:

$$5555.53 - 20000 \cdot q_{012} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{012} = 0.278$$

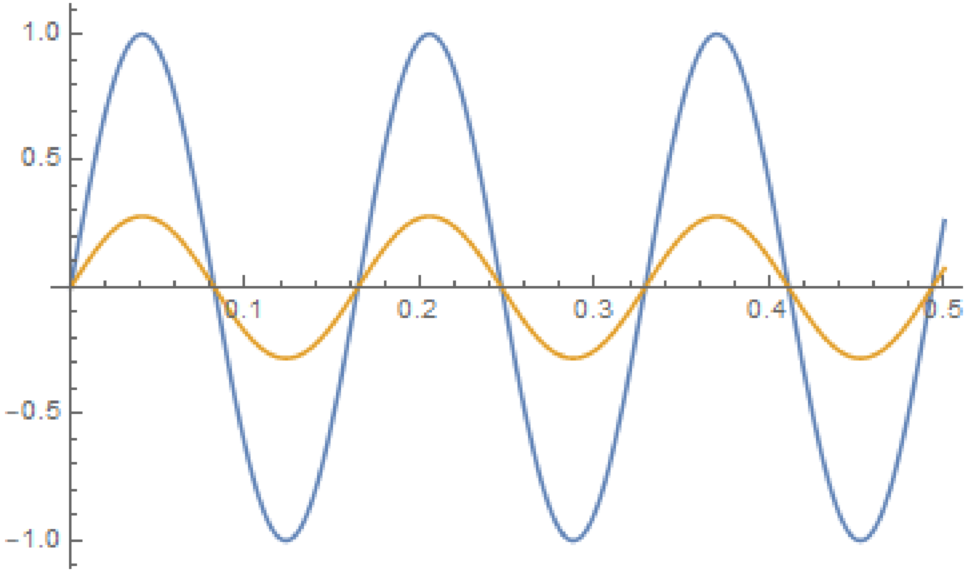
Z drugiego równania:

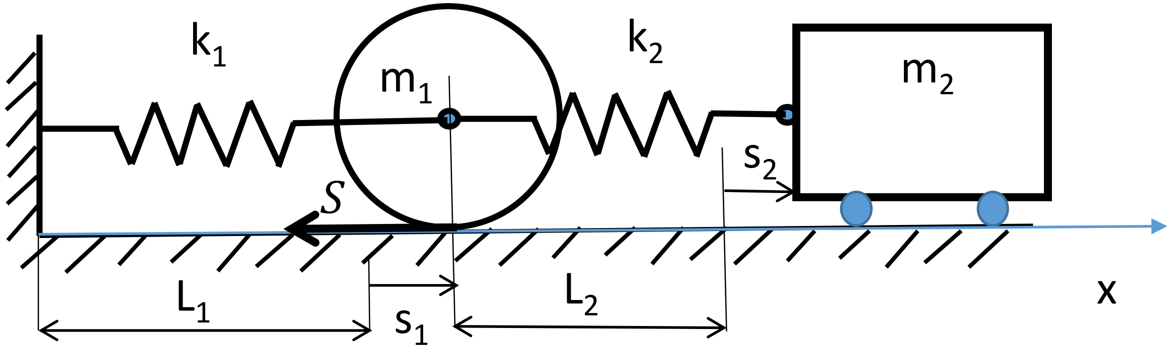
$$-4444.47 + 15555.53 \cdot q_{012} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{012} = 0.286$$

Z jednego i z drugiego równania powinna być ta sama wartość, błędy wynikają z przybliżeń.

Przyjmujemy: $q_{011} = 1$ $q_{012} = 0.28$

Przyjmujemy: $q_{011} = 1$ $q_{012} = 0.28$





dla ω_{02} $$\begin{bmatrix} 10000 - 3\lambda_2 & -20000 \\ -3\lambda_2 & 20000 - 3\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{021} \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przyjmujemy $q_{021} = 1$

$$\begin{bmatrix} 10000 - 3 \cdot\ 15205.2 & -20000 \\ -3 \cdot 15205.2 & 20000 - 3 \cdot 15205.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -35615.6 & -20000 \\ -45615.6 & -25615.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z pierwszego równania:

$$-35615.6 - 20000 \cdot q_{022} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{022} = -1.78$$

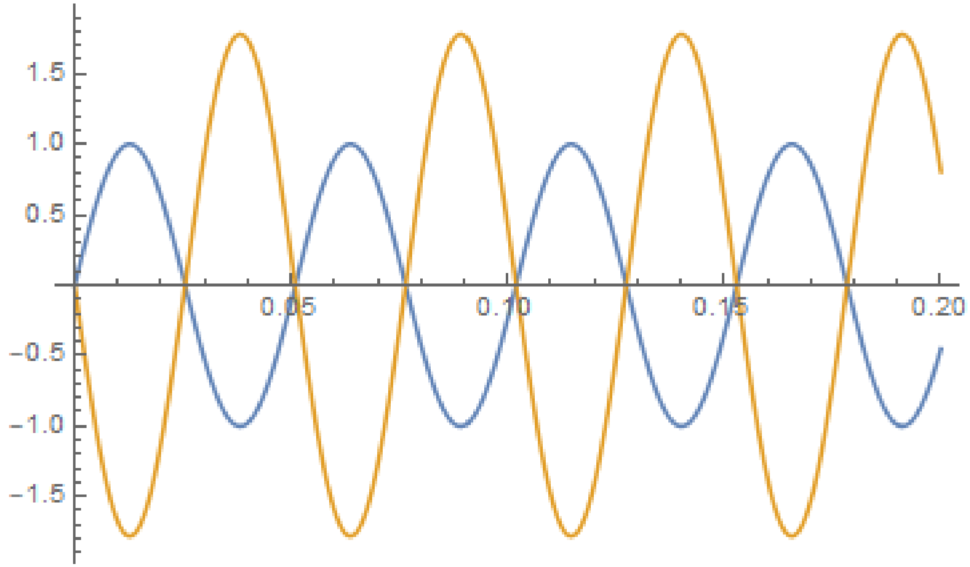
Z drugiego równania:

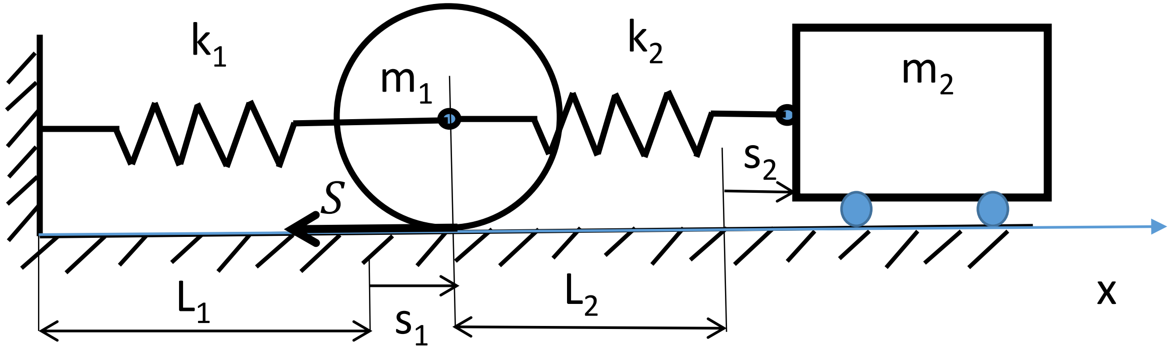
$$-45615.6 - 25615.6 \cdot q_{022} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{022} = -1.78$$

Z jednego i z drugiego równania powinna być ta sama wartość, błędy wynikają z przybliżeń.

Przyjmujemy: $q_{011} = 1$ $q_{012} = -1.78$

Przyjmujemy: $q_{011} = 1$ $q_{012} = -1.78$





Ruch dowolny układu

Dowolny ruch naszego układu możemy zawsze przedstawić jako złożenie obu drgań własnych.

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{K} - \omega_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{M}\right) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M}) = 0$$

$\omega_{\boldsymbol{0i}}$ - mamy N częstości drgań własnych, wektory własne $\boldsymbol{q_{0i}}$

Czyli rozwiązanie przewidujemy postaci:

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t}) = A_1 \boldsymbol{q_{01}} \sin(\omega_{01} t + \varphi_1) + A_2 \boldsymbol{q_{02}} sin(\omega_{02} t + \varphi_2)$$

Prędkość będzie:

$$\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{t}) = A_1 \omega_{01} \boldsymbol{q_{01}} \cos(\omega_{01} t + \varphi_1) + A_2 \omega_{02} \boldsymbol{q_{02}} cos(\omega_{02} t + \varphi_2)$$

$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ - amplitudy i fazy wyznacza się na postawie warunków początkowych:

$$\boldsymbol{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix}$$

Czyli:

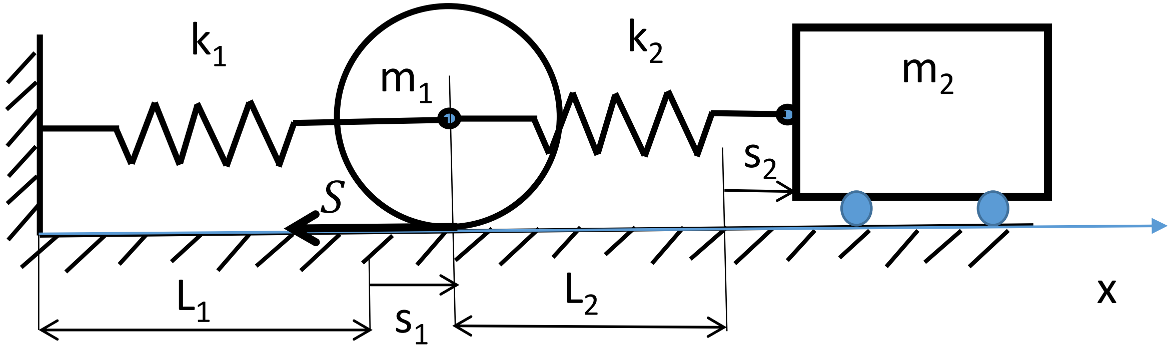
$$\boldsymbol{q}(0) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} \sin(\varphi_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} sin(\varphi_2)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(0) = A_1 \omega_{01} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} \cos(\varphi_1) + A_2 \omega_{02} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} cos(\varphi_2)$$

Cztery równania i cztery niewiadome.

Można wyznaczyć ogólne równania, ale będą dość skompliowane.

Wyznaczymy równania ruchu dla naszego przykładu



$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\omega_{01} = \sqrt{\lambda_1} = 38{,}23$ $\quad q_{011} = 1$ $\quad q_{012} = 0.28$

$\omega_{02} = \sqrt{\lambda_2} = 123.31$ $\quad q_{021} = 1$ $\quad q_{022} = -1.78$

załóżmy warunki początkowe; $\boldsymbol{q}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

czyli: $\boldsymbol{q}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.28 \end{bmatrix} \sin(\varphi_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 \end{bmatrix} sin(\varphi_2)$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = A_1 38.23 \ \begin{bmatrix} 1 \\ 0.28 \end{bmatrix} \cos(\varphi_1) + A_2 123.31 \ \begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 \end{bmatrix} cos(\varphi_2)$$

Po rozwiązaniu układu czterech równań dostaniemy cztery rozwiązania, które w zasadzie dają dokładnie te same przebiegi czasowe:

$$A_1 = 0.865, A_2 = 0.136, \varphi_1 = 1.519, \varphi_2 = 1.555$$

co po podstawieniu daje:

$$\boldsymbol{q}(t) = 0.865 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.28 \end{bmatrix} \sin(38.23\, t + 1.519) + 0.136 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 \end{bmatrix} sin(123.31\, t + \varphi_2)$$