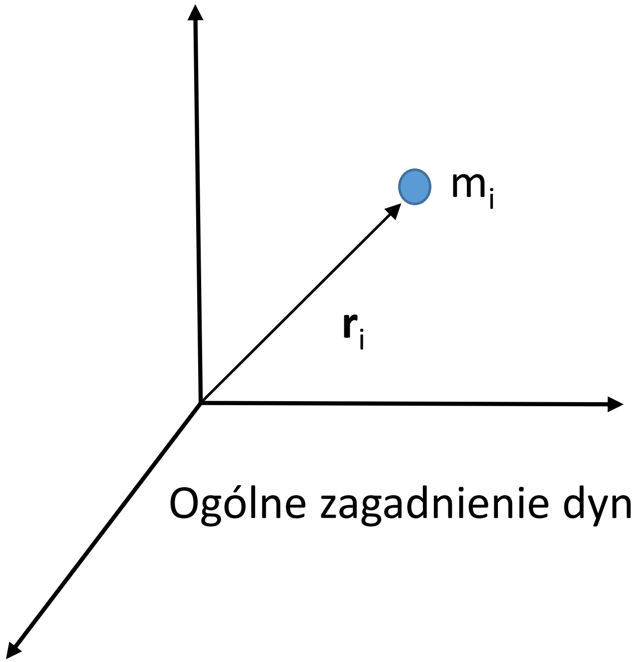
Mechanika Analityczna

Mirosław Bocian

Książki

- 1. „Mechanika ogólna” cz.2. Jerzy Leyko
- 2. „Mechanika” Skalmierski
- 3. „Mechanika” cz.2. B. Gabryszewska, A. Pszonka
- 4. „Zbiór zadań z mechaniki: metodyka rozwiązań”, J. Gierkiel, L. Głuch, A. Łopata, Wyd. AGH, dostęp elektroniczny
- 5. „Zbiór zadań z mechaniki ogólnej”, J. Giergiel

Pojęcie mechanicznego układu dynamicznego



Ogólne zagadnienie dynamiki

a) zbiór mas $m_i\{\bar{r}_i\}$
b) więzy $g_v(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0$
c) siły aktywne$\overline{F_l} = \overline{F_l}(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t)$
d) warunki początkowe

Na podstawie tego mamy wyznaczyć $\bar{r}_i$(t)

Więzy

wszelkiego rodzaju ograniczenia wpływające na ruch ciała lub ciał

mogą być to ograniczenia geometryczne lub kinematyczne

równanie opisujące więzy można zapisać w następujący sposób

$$g_v(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0$$

jeśli więzy nie zależą od prędkości to będziemy je nazywać WIĘZAMI HOLONOMICZNYMI.

$$g_v(\bar{r}_i, t) = 0$$

Od tej chwili tylko takie więzy nas będą interesować.

Liczba stopni swobody $\boxed{s = 3n - k}$ n – liczba punktów materialnych, k- równania więzów

Przemieszczenia możliwe i wirtualne (przygotowane)

Układ skrępowany $\mathrm{k} \leq 3n$ więzami niezależnymi postaci

$$g_v(\bar{r}_i, t) = 0, \quad v = 1,2, \dots, k$$

wtedy pochodna po czasie

$$\frac{dg_v}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} \dot{\bar{r}}_j + \frac{\partial g_v}{\partial t} = 0$$

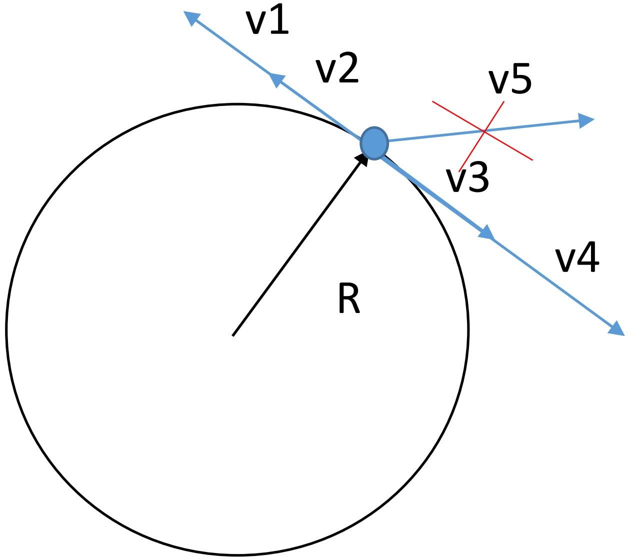
Gdy $\mathrm{k} = 3n$, to układ całkowicie jest skrępowany i zależy tylko od ustalonego ruchu więzów.

Ale gdy $\mathrm{k} < 3n$, równań jest za mało a rozwiązań ∞ wiele.

Te prędkości, które spełniają równania więzów to prędkości możliwe.

Prędkości możliwe

Ruch po okręgu, na płaszczyźnie, prędkość musi być styczna do toru



v1, **v**2, **v**3, **v**4 to wektory prędkości możliwych.
wektor **v**5 nie wektorem prędkości możliwej

W rzeczywistości realizuje się tylko jeden układ prędkości możliwych.
Jaki?
Tego właśnie szukamy.

Jeśli ten układ prędkości możliwych pomnożymy przez *dt* to dostaniemy układ przemieszczeń możliwych

przemieszczenia wirtualne

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} \dot{\bar{r}}_j + \frac{\partial g_v}{\partial t} = 0 \qquad \text{pomnożymy przed} \qquad dt$$

to dostaniemy
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} d\bar{r}_j + \frac{\partial g_v}{\partial t} dt = 0$$

Weźmy dwa dowolne układy przemieszczeń możliwych $[d\bar{r}_j{}']$ oraz $[d\bar{r}_j{}'']$ i podstawmy

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} d\bar{r}_j{}' + \frac{\partial g_v}{\partial t} dt = 0$$

(-)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} d\bar{r}_j{}'' + \frac{\partial g_v}{\partial t} dt = 0$$

---

po odjęciu dostaniemy
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} \left(d\bar{r}_j' - d\bar{r}_j''\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_v}{\partial \bar{r}_j} \delta\bar{r}_j = 0$$

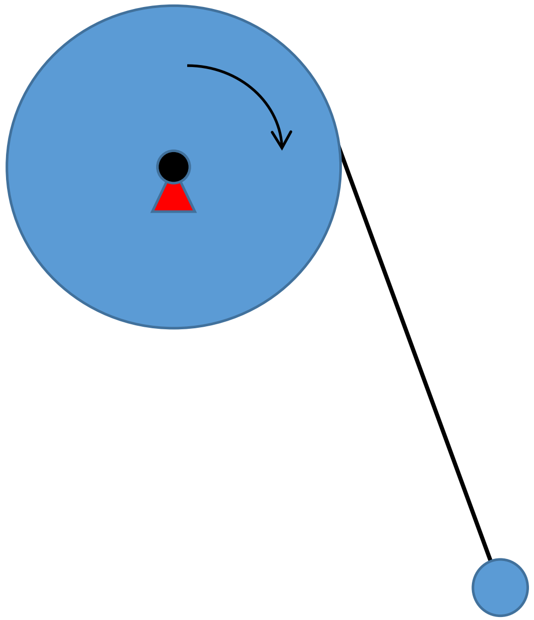
$\delta\bar{r}_j$ - to przemieszczenie wirtualne

Kiedy $\delta\bar{r}_j$ to to samo co $\boldsymbol{d}\bar{r}_j$

gdy $\frac{\partial g_v}{\partial t}$=0

jest to prawdziwe jak więzy nie zależą od czasu

takie więzy nazywamy więzami skleronomicznymi



więzy nieskleronomiczne (inaczej reonomiczne), wahadło rozwija się z bębna, długość wahadła zmienia się według zadanego równania L=L(t)

Więzy idealne. Ogólne równanie dynamiki.

Def. dla $m_i\{\bar{r}_i\}$ i=1,2,…,n więzy idealne gdy $\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0$

Więzy idealne – reakcja normalna do powierzchni (bez tarcia)!!!!, powierzchnia idealnie gładka

Z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i \qquad /\cdot \delta \bar{r}_i$$

$$(m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i)\delta \bar{r}_i = \bar{R}_i \, \delta \bar{r}_i \qquad /\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i)\delta \bar{r}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i \, \delta \bar{r}_i}_{=0}$$

Ogólne równanie dynamiki

Czyli $$\sum_{i=1}^{n} (m_i\ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i)\delta\bar{r}_i = 0$$

Suma prac sił aktywnych i bezwładnościowych na przemieszczeniach wirtualnych jest równa 0

To jest Ogólne Równanie Dynamiki lub Zasada d'Alemberta

Najogólniejsza zasada statyki
(Zasada prac przygotowanych)

Jeśli mamy statykę (bezruch) to przyspieszenie i prędkość jest równa 0

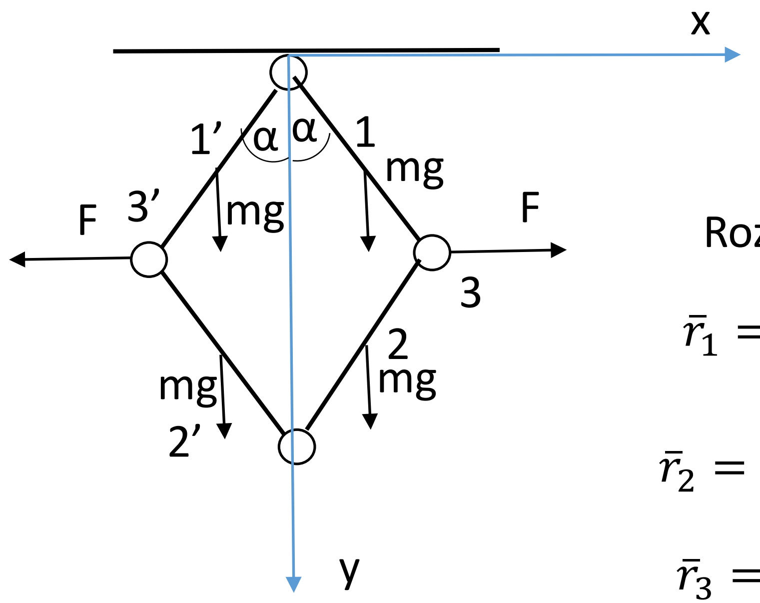
Czyli
$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i - m_i\ddot{\bar{r}}_i)\delta\bar{r}_i = 0$$

=0

Stąd
$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\delta\bar{r}_i = 0$$

Na to by pewne (zgodne z więzami) położenie układu było jego położeniem równowagi potrzeba i wystarczy aby w tym położeniu suma prac sił aktywnych na dowolnych przemieszczeniach wirtualnych była równa zero.

przykład: Znajdź położenie równowagi układu.



Dane: F, m-masa pręta, a- długość pręta

Pręty połączone przegubowo, F-siła działająca na boki, ciężar prętów - mg

Rozwiązanie: Wprowadzamy promienie wodzące dla wszystkich punktów:1,2,3,1’,2’,3’.

$$\bar{r}_1 = \left(\frac{a}{2}sin\alpha\right)\bar{\imath} + \left(\frac{a}{2}cos\alpha\right)\bar{\jmath} \qquad \bar{r}_1{}' = \left(-\frac{a}{2}sin\alpha\right)\bar{\imath} + \left(\frac{a}{2}cos\alpha\right)\bar{\jmath}$$

$$\bar{r}_2 = \left(\frac{a}{2}sin\alpha\right)\bar{\imath} + \left(\frac{3a}{2}cos\alpha\right)\bar{\jmath} \qquad \bar{r}_2{}' = \left(-\frac{a}{2}sin\alpha\right)\bar{\imath} + \left(\frac{3a}{2}cos\alpha\right)\bar{\jmath}$$

$$\bar{r}_3 = (asin\alpha)\bar{\imath} + (acos\alpha)\bar{\jmath} \qquad \bar{r}_3{}' = (-asin\alpha)\bar{\imath} + (acos\alpha)\bar{\jmath}$$

układ jest skleronomiczny więc $\delta\bar{r}_j = d\bar{r}_j$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\delta\bar{r}_i = mg\bar{\jmath}\,d\bar{r}_1 + mg\bar{\jmath}\,d\bar{r}_2 + F\bar{\imath}d\bar{r}_3 + mg\bar{\jmath}\,d\bar{r}_1' + mg\bar{\jmath}\,d\bar{r}_2' - F\bar{\imath}d\bar{r}_3' = 0$$

$$d\bar{r}_1 = \left(\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{\jmath} \qquad d\bar{r}_1' = \left(-\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{\jmath} \qquad d\bar{r}_2 = \left(\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{3a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{\jmath}$$

$$d\bar{r}_2{}' = \left(-\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{3a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{\jmath} \qquad d\bar{r}_3 = (acos\alpha d\alpha)\bar{\imath} - (asin\alpha d\alpha)\bar{\jmath} \qquad d\bar{r}_3{}' = (-acos\alpha d\alpha)\bar{\imath} - (asin\alpha d\alpha)\bar{\jmath}$$

podstawiamy

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i d\bar{r}_i = mg\bar{j}\left[\left(\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{j}\right] + mg\bar{j}\left[\left(\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{3a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{j}\right] +$$

$$+F\bar{\imath}[(acos\alpha d\alpha)\bar{\imath} - (asin\alpha d\alpha)\bar{j}] + mg\bar{j}\left[\left(-\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{j}\right] + mg\bar{j}\left[\left(-\frac{a}{2}cos\alpha d\alpha\right)\bar{\imath} - \left(\frac{3a}{2}sin\alpha d\alpha\right)\bar{j}\right]$$

$$-F\bar{\imath}[(-acos\alpha d\alpha)\bar{\imath} - (asin\alpha d\alpha)\bar{j}] = 0$$

Przypomnienie: z iloczynu skalarnego wiemy, że $\bar{\imath}\cdot\bar{\imath} = \bar{j}\cdot\bar{j} = 1$, a $\bar{\imath}\cdot\bar{j} = 0$

Stąd mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i d\bar{r}_i = -mg\left(\frac{a}{2}sin\alpha d\alpha\right) - mg\left(\frac{3a}{2}sin\alpha d\alpha\right) +$$

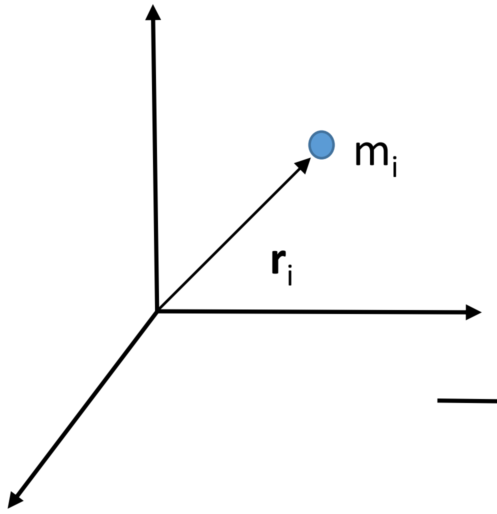
$$+F\,(acos\alpha d\alpha) - mg\left(\frac{a}{2}sin\alpha d\alpha\right) - mg\left(\frac{3a}{2}sin\alpha d\alpha\right) + F(asin\alpha d\alpha) = (-4mga\,sin\alpha + 2Facos\alpha)d\alpha = 0$$

ma być prawdziwe dla dowolnego dα

$$-4mga\,sin\alpha + 2Facos\alpha = 0$$

Odp. $$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha = \frac{F}{2mg}$$

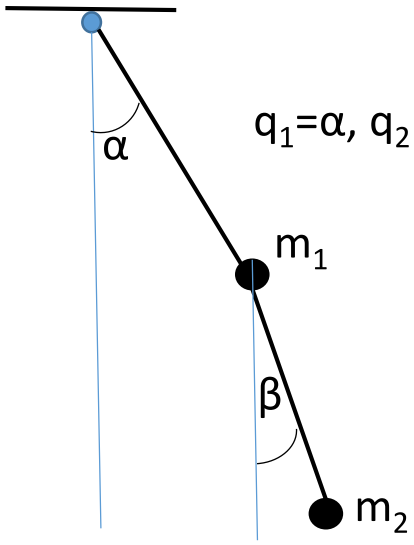
Więzy i siły uogólnione



a) zbiór mas $m_i\{\bar{r}_i\}$
b) więzy $g_v(\bar{r}_i, t) = 0$
c) s=3n-k liczba stopni swobody - oznaczmy jako N

Wprowadźmy bazę współrzędnych uogólnionych (tyle ile stopni swobody) $q_1, q_2, \ldots, q_N$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t)$$



$q_1=\alpha$, $q_2=\beta$

Ruch punktu swobodnego w przestrzeni konfiguracji (we wsp. uogólnionych) określa ruch układu.

Jak wyznaczymy $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_N(t)$ to wyznaczymy $\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \ldots, \bar{r}_n(t)$

wyznaczanie przemieszczeń przygotowanych ze współrzędnych uogólnionych

$\dot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$ pomnożymy przed dt ($\dot{q}_j$ - prędkość uogólniona)

$$d\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\, dt$$

dla dwóch różnych $d\bar{r}_i{}'$ i $d\bar{r}_i{}''$

$$d\bar{r}_i{}' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j{}' + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\, dt$$

(-) $$d\bar{r}_i{}'' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j{}'' + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\, dt$$

---

po odjęciu dostaniemy

$$\delta\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \left(dq_j' - dq_j''\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta\, q_j$$

Zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych przyjmuje postać

N-liczba stopni swobody, n-liczba punktów materialnych

$$\bar{Q}\delta\bar{q} = \sum_{m=1}^{N} Q_m \delta q_m = ma\ być\ równe = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \delta\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \left[\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \delta\, q_m\right] = \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m$$

$$\bar{Q}\delta\bar{q} = \sum_{m=1}^{N} Q_m \delta q_m = ma\ być\ równe = \sum_{m=1}^{N} \delta q_m \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right]$$

Q_m Siła uogólniona

Siła uogólniona

$$Q_m = \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right]$$

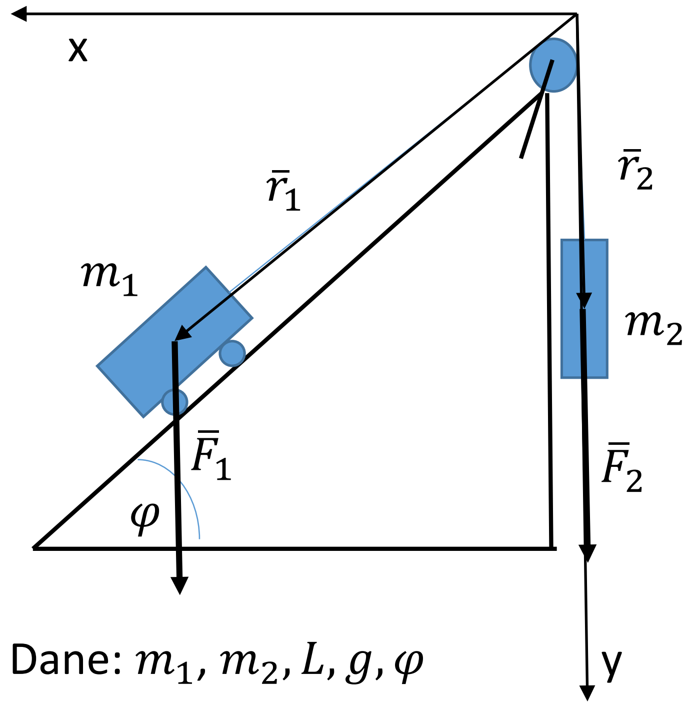
praca

$$Q_m = \frac{\delta W_m}{\delta q_m}$$

Siła uogólniona nie musi być w Newtonach!!!!

przykład

Stosując zasadę d’Alembert’a oblicz przyspieszenie punktów materialnych układu oraz siłę w linie



Dane: m_1, m_2, L, g, φ

długość liny

n=2 $\quad \bar{r}_1 = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath} + z_1\bar{k}, \qquad \bar{r}_2 = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath} + z_2\bar{k}$

„m” równań więzów

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 0, z_2 = 0 \\ \frac{y_1}{x_1} = \text{tg } \varphi, \qquad x_2 = 0 \\ \sqrt{y_1^2 + x_1^2} + y_2 - L = 0 \end{array}}$$

jeden stopień swobody

N=3n-m=1

Więzy nie zależą od czasu (skleronomiczne)

$$\delta\bar{r}_j \equiv d\bar{r}_j$$

Ogólne równanie dynamiki

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i - m_i\ddot{\bar{r}}_i)d\bar{r}_i = (\bar{F}_1 - m_1\ddot{\bar{r}}_1)d\bar{r}_1 + (\bar{F}_2 - m_2\ddot{\bar{r}}_2)d\bar{r}_2 = 0$$

Siły aktywne

$$\bar{F}_1 = m_1 g\bar{\jmath}, \quad \bar{F}_2 = m_2 g\bar{\jmath},$$

cd.

$$\bar{r}_1 = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}, \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{r}}_1 = \dot{x}_1\bar{\imath} + \dot{y}_1\bar{\jmath}, \quad \rightarrow \quad \ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{x}_1\bar{\imath} + \ddot{y}_1\bar{\jmath}$$

$$\bar{r}_2 = y_2\bar{\jmath}, \rightarrow \quad \dot{\bar{r}}_2 = \dot{y}_2\bar{\jmath}, \quad \rightarrow \quad \ddot{\bar{r}}_2 = \ddot{y}_2\bar{\jmath}$$

| *dt

$$d\bar{r}_1 = dx_1\bar{\imath} + dy_1\bar{\jmath},$$

$$d\bar{r}_2 = dy_2\bar{\jmath}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i - m_i\ddot{\bar{r}}_i)d\bar{r}_i = \left(m_1 g\bar{\jmath} - m_1(\ddot{x}_1\bar{\imath} + \ddot{y}_1\bar{\jmath})\right)(dx_1\bar{\imath} + dy_1\bar{\jmath}) + \left(m_2 g\bar{\jmath} - m_2(\ddot{y}_2\bar{\jmath})\right)(dy_2\bar{\jmath}) =$$

$$= m_1 g \; dy_1 - m_1\ddot{x}_1 dx_1 - m_1\ddot{y}_1 dy_1 + m_2 g dy_2 - m_2\ddot{y}_2 dy_2 = 0$$

wszystko uzależniamy od x_1

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \varphi$$
$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 \operatorname{tg} \varphi$$
$$\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 \operatorname{tg} \varphi$$
$$dy_1 = dx_1 \operatorname{tg} \varphi$$

$$\sqrt{y_1^2 + x_1^2} + y_2 = \sqrt{x_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + x_1^2} + y_2 = x_1\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}} + y_2 = x_1\frac{1}{\cos\varphi} + y_2 = L$$

$$y_2 = L - x_1\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\dot{y}_2 = -\dot{x}_1\frac{1}{\cos\varphi} \qquad dy_2 = -dx_1\frac{1}{\cos\varphi} \qquad \ddot{y}_2 = -\ddot{x}_1\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{F}_i - m_i\ddot{\bar{r}}_i)d\bar{r}_i = m_1 g \,\mathrm{tg}\,\varphi\, dx_1 - m_1\ddot{x}_1 dx_1 - m_1\ddot{x}_1 \mathrm{tg}^2\varphi\, dx_1 - m_2 g\frac{1}{\cos\varphi}dx_1 - m_2\ddot{x}_1\frac{1}{\cos^2\varphi}dx_1 = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}dx_1\underbrace{(m_1 g\sin\varphi\cos\varphi - \overbrace{m_1\ddot{x}_1\cos^2\varphi - m_1\ddot{x}_1\sin^2\varphi}^{1\ \text{trygonometryczna}} - m_2 g\cos\varphi - m_2\ddot{x}_1)}_{=0}=0$$

to ma być prawdziwe dla dowolnego dx_1

czyli

$$\ddot{x}_1=\frac{\cos\varphi(m_1 g\sin\varphi - m_2 g)}{m_1+m_2}$$

$$\ddot{y}_1 = x_1\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi(m_1 g\sin\varphi - m_2 g)}{m_1+m_2}$$

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{x}_1\frac{1}{\cos\varphi} = -\frac{g(m_1\sin\varphi - m_2)}{m_1+m_2}$$

Siła w linie

$$S = m_2 g - m_2\ddot{y}_2 = m_2 g\left(1-\frac{m_2 - m_1\sin\varphi}{m_1+m_2}\right)$$