Równanie Lagrange'a II rodzaju

Przypomnijmy co to jest siła uogólniona: $Q_l = \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}\right]$

Wychodzimy z ogólnego równania dynamiki

$$\sum_{i=1}^{n} (-m_i \ddot{\bar{r}}_i + \bar{F}_i)\delta \bar{r}_i = 0$$

N – liczba stopni swobody

$$-\sum_{i=1}^{n} (-m_i \ddot{\bar{r}}_i)\delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \delta \bar{r}_i$$

siła bezwładności

$$\bar{Q}\delta\bar{q} = \sum_{m=1}^{N} Q_m dq_m$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-m_i \ddot{\bar{r}}_i)\delta \bar{r}_i = \bar{B}d\bar{q} = \sum_{m=1}^{N} B_m dq_m$$

ale $\delta \bar{r}_i = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} d\, q_m$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(-m_i\ddot{\bar{r}}_i)\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}d\,q_m\right]=\sum_{m=1}^{N}B_m dq_m$$

$$\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right)\right]dq_m=\sum_{m=1}^{N}B_m dq_m$$

$$B_m=\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right)=?$$

Sprawdźmy to od drugiej strony

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right)=\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}+\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right)=\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}+\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_m}$$

1 2 3

$$2 = 1 - 3 = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right)-\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_m}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} d(v^2)=2vdv \\ \frac{1}{2}d(v^2)=vdv \end{gathered}}$$

$$2 = 1 - 3 = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)$$

Zakładamy, że

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_m}$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = -2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_m}\right)$$

Podobnie jak ostatnio

$$B_m = \sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m}\left(m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)\right)$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \frac{\partial}{\partial q_m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i\frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\bar{r}}_i)^2 = E_k$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \frac{\partial\, E_k}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m}\right)$$

$$-\sum_{m=1}^{N} B_m dq_m = \sum_{m=1}^{N} Q_m dq_m$$

$$\sum_{m=1}^{N} (B_m + Q_m) dq_m = 0$$

Musi być prawdziwe dla dowolnego dq_m

$$B_m + Q_m = 0 \quad \Rightarrow \quad -B_m = Q_m$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial\, E_k}{\partial q_m} = Q_m$$

(m=1,2,…,N)

Równanie Lagrange'a II rodzaju

różne formy równania:

najogólniejsza $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_l} = Q_l$$ gdzie

E_k- energia kinetyczna układu

q_l- wsp. uogólniona

$\dot{q}_l$- prędkość uogólniona

Q_l=$\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}\right]$ siła uogólniona

jeśli są siły potencjalne można wyciągnąć je z prawej strony i dać po lewej jako energię potencjalną

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_l} + \frac{\partial E_p}{\partial q_l} = Q_l$$

Q_l - wtedy tutaj tylko siły niepotencjalne

jeśli nie ma sił niepotencjalnych (dyssypacyjnych, rozpraszających energie) wtedy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_l} + \frac{\partial E_p}{\partial q_l} = 0$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju

funkcja Lagrange'a $L = E_k - E_p$

wiedząc, że E_p zależy tylko od położenia to $\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_l} = 0$ więc możemy zapisać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_l}\right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial q_l} - \frac{\partial E_p}{\partial q_l}\right) = Q_l$$

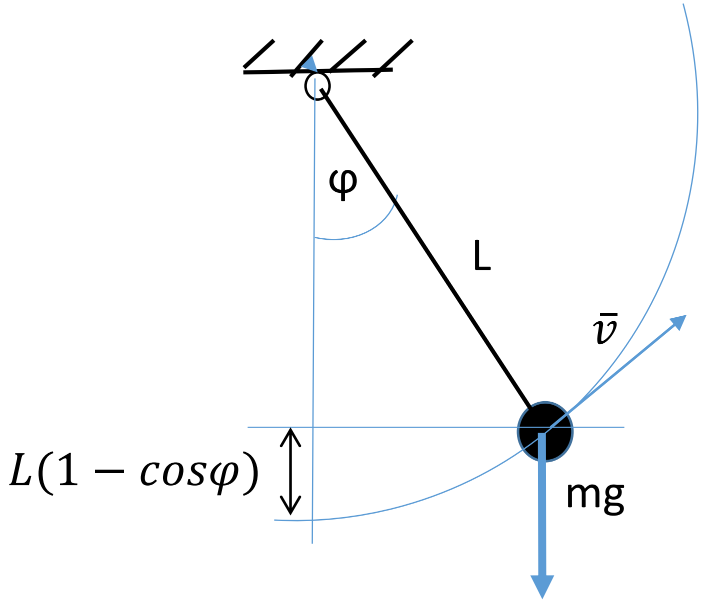
czyli

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\right) = Q_l$$

$l = 1, \dots, N$ liczba wsp. uogólnionych

gdzie $L = E_k - E_p$

Wahadło matematyczne



$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad v = \dot{\varphi}L$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2$$

Układ ma jeden stopień swobody

dla $\varphi = 0$ $E_p = 0$

$$E_p = mgL(1 - cos\varphi)$$

brak rozpraszania energii, siły tylko potencjalne:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_l} + \frac{\partial E_p}{\partial q_l} = 0$$

obieramy wsp. uogólnioną $q = \varphi$