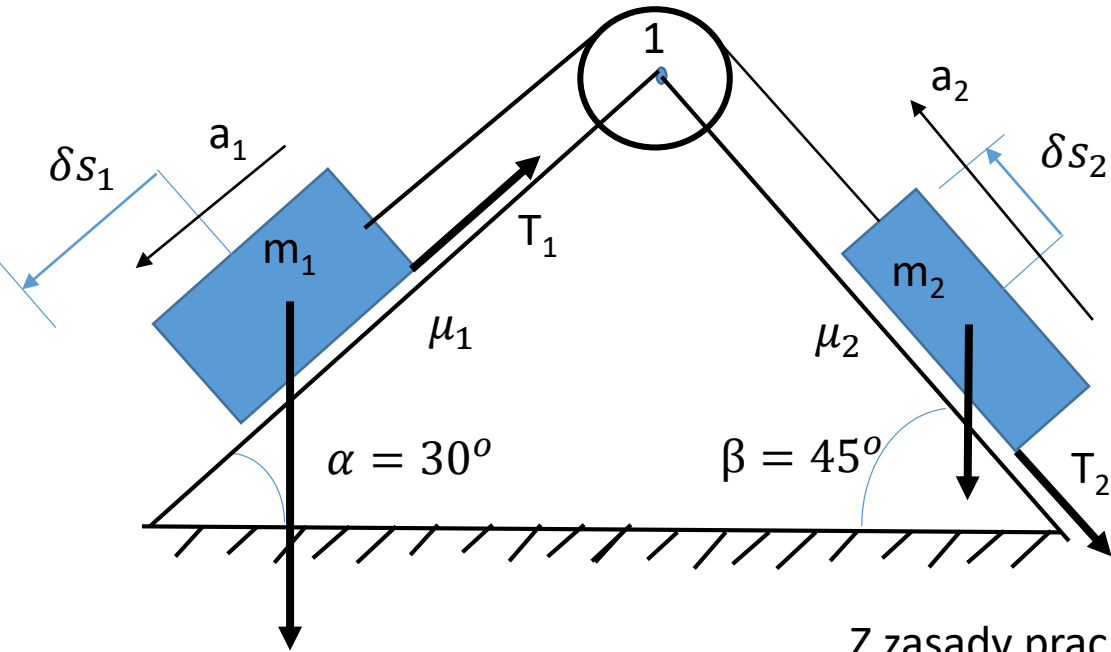


Zasada d'Alemberta. Dynamika w zasadzie prac przygotowanych.



Wyznacz przyspieszenie klocka  $m_1$  i  $m_2$ .

Dane:  $m_1, m_2, m_3, \mu_1, \mu_2, \alpha$  i  $\beta$ . Krążek 1 jest nieważki, linki idealnie sztywne

Rozwiązanie.

Zakładamy jakiś kierunek ruchu układu, niech  $m_1 \gg m_2$  wtedy  $m_1$  porusza się w dół.

Z zasady prac przygotowanych

Siły ciężkości i tarcia rzutujemy na kierunek naszych przemieszczeń wirtualnych.

Siły tarcia:  $T_1 = m_1 \mu_1 g \cos \alpha, T_2 = m_2 \mu_2 g \cos \beta$

przyspieszenie jest zgodne z przemieszczeniem wirtualnym, minus wynika ze wzoru (siła bezwładności)

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = ((m_1 g \sin \alpha - m_1 \mu_1 g \cos \alpha) - m_1 a_1) \delta s_1 + ((-m_2 g \sin \beta - m_2 \mu_2 g \cos \beta) - m_2 a_2) \delta s_2 = 0$$



linka nieważka i nierozciągliwa więc:  $a_1 = a_2, \delta s_1 = \delta s_2$

$$(m_1 g \sin \alpha - m_1 \mu_1 g \cos \alpha - m_1 a_1 - m_2 g \sin \beta - m_2 \mu_2 g \cos \beta - m_2 a_1) \delta s_1 = 0$$

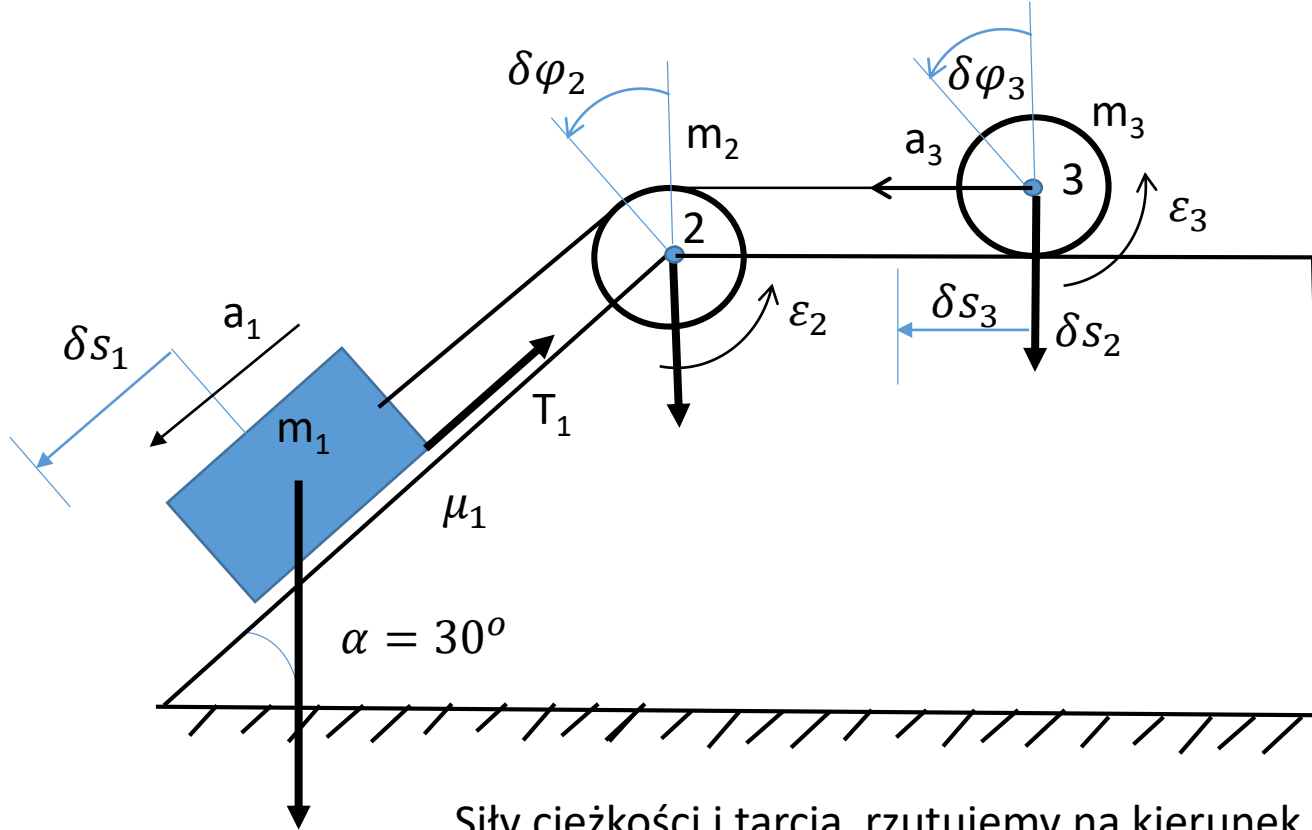
Ma to być prawdziwe dla dowolnego  $\delta s_1$ , więc to co w nawiasie ma być równe zero.

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 \mu_1 g \cos \alpha - m_1 a_1 - m_2 g \sin \beta - m_2 \mu_2 g \cos \beta - m_2 a_1 = 0$$

$$m_1 g (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - m_2 g (\sin \beta + \mu_2 \cos \beta) = a_1 (m_1 + m_2)$$

$$a_1 = \frac{m_1 g (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - m_2 g (\sin \beta + \mu_2 \cos \beta)}{m_1 + m_2}$$

Gdyby okazało się, że  $a_1$  jest ujemne, to jeszcze nie znaczy, że układ z takim przyspieszeniem będzie się poruszał w drugą stronę. Przy ruchu w drugą stronę zmienia się kierunek tarcia, więc należy przeliczyć jeszcze raz.



Oblicz przyspieszenie  $a_1$

Dane:  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ,  
 $R_1 = R_2 = R$  – promienie krążków

Rozwiązanie.

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = 0$$

Siły ciężkości i tarcia rzutujemy na kierunek naszych przemieszczeń wirtualnych.

Siła tarcia:  $T_1 = m_1 \mu_1 g \cos \alpha$

Dla krążka który się obraca zasada prac opiera się o przemieszczenie wirtualne jako kąt  $\delta \varphi$  wtedy wzór wygląda tak  $\sum_{i=1}^n (M_{zi} - I_{zi} \varepsilon_i) \delta \varphi_i = 0$

Mamy tu ruch płaski, momentu zewnętrznego (napędowego czy hamującego) w naszym przykładzie nie ma, więc zostaje bezwładność ruchu obrotowego, która jest równa iloczynowi momentu bezwładności względem osi obrotu i przyspieszenia kąowego  $I_{zi} \varepsilon_i$ .

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = ((m_1 g \sin \alpha - m_1 \mu_1 g \cos \alpha) - m_1 a_1) \delta s_1 + \\ + (0 - I_{z2} \varepsilon_2) \delta \varphi_2 + (0 - m_3 a_3) \delta s_3 + (0 - I_{z3} \varepsilon_3) \delta \varphi_3 = 0$$

Krążek nr 2 obraca się tylko, więc bezwładność ma wartość  $I_{z2} \varepsilon_2$

Krążek nr 3 obraca się i przesuwa zarazem, więc bezwładność z ruchem obrotowym ma wartość  $I_{z3} \varepsilon_3$  i dodatkowo bezwładność związana z przyspieszeniem środka jego masy  $m_3 a_3$ , gdzie  $I_{z3}$  moment bezwładności względem środka masy.

$$I_{z2} = \frac{m_2 R^2}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R} \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R}$$



z ruchu płaskiego

$a_3 = a_1, \delta s_3 = \delta s_1$  bo jest nieważka i nierozciągliwa nić

$$I_{z3} = \frac{m_3 R^2}{2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{R} \quad \delta \varphi_3 = \frac{\delta s_1}{R}$$



z ruchu płaskiego

stąd mamy:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{r}_i) \delta \bar{r}_i = ((m_1 g \sin \alpha - m_1 \mu_1 g \cos \alpha) - m_1 a_1) \delta s_1 + \\ + (0 - \frac{m_2 R^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R}) \frac{\delta s_1}{R} + (0 - m_3 a_1) \delta s_1 + (0 - \frac{m_3 R^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R}) \frac{\delta s_1}{R} = 0$$

$$\delta s_1 \left( m_1 g \sin \alpha - m_1 \mu_1 g \cos \alpha - m_1 a_1 - \frac{m_2 a_1}{2} - m_3 a_1 - \frac{m_3 a_1}{2} \right) = 0$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$

$$\delta s_1 \left( m g \sin \alpha - m \mu_1 g \cos \alpha - m a_1 - \frac{m a_1}{2} - m a_1 - \frac{m a_1}{2} \right) = 0$$

ma być prawdziwe dla dowolnego  $\delta s_1$  więc to co w nawiasie musi być równe zero

$$m g \sin \alpha - m \mu_1 g \cos \alpha - m a_1 - \frac{m a_1}{2} - m a_1 - \frac{m a_1}{2} = 0$$

Odp.

$$a_1 = \frac{g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)}{3}$$