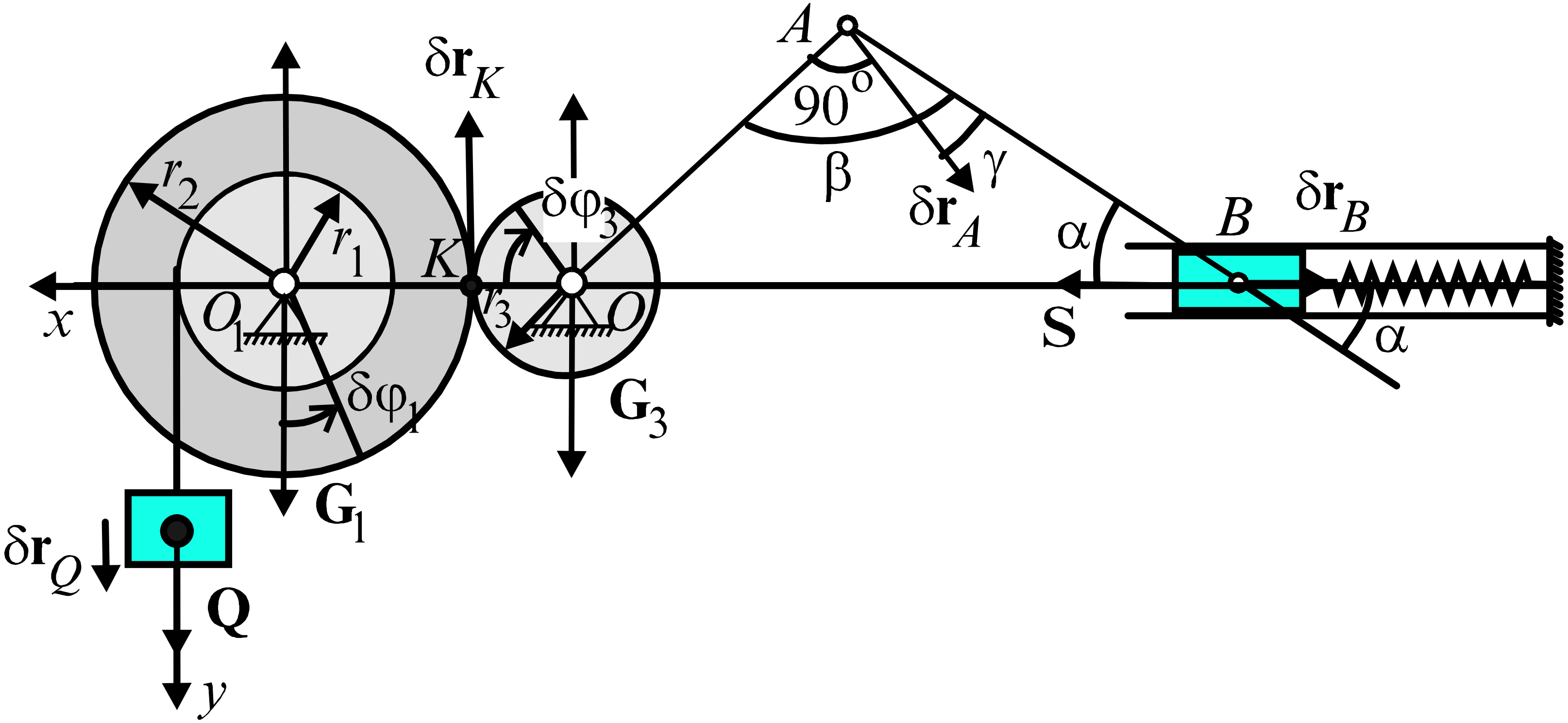
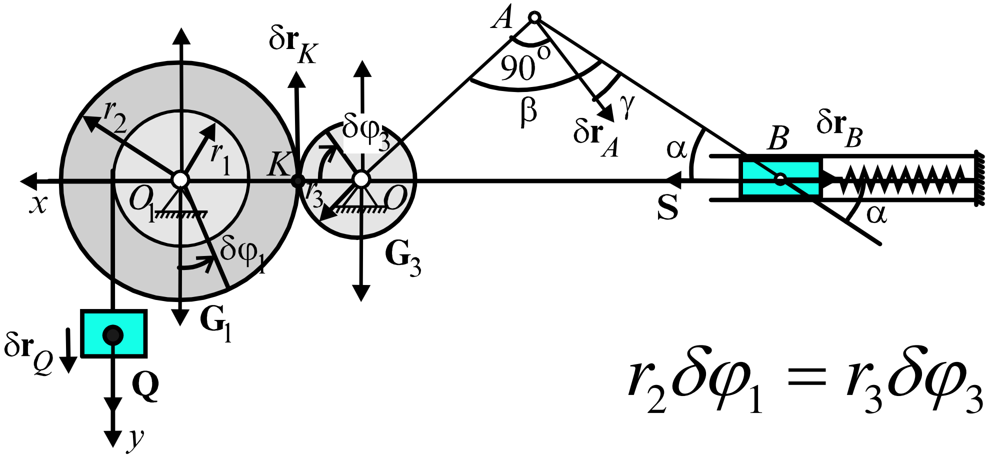
Przykład. Wykorzystując zasadę prac przygotowanych wyznaczyć wydłużenie sprężyny.





$$\delta r_Q = r_1 \delta\varphi_1$$

$$\delta r_K = r_2 \delta\varphi_1$$

$$r_2 \delta\varphi_1 = r_3 \delta\varphi_3 \;\rightarrow\; \delta\varphi_3 = r_2 \frac{\delta\varphi_1}{r_3} = r_2 \frac{\delta r_Q}{r_1 r_3}$$

$$\delta r_A = OA \cdot \delta\varphi_3 = OA r_2 \frac{\delta r_Q}{r_1 r_3}$$

$$\delta r_A \cos\gamma = \delta r_B \cos\alpha = \delta r_B \cos\alpha \;\rightarrow\; \delta r_B = \delta r_A \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = OA \cdot r_2 \frac{\delta r_Q}{r_1 \cdot r_3} \frac{\cos\left(\beta - 90^\circ\right)}{\cos\alpha}$$

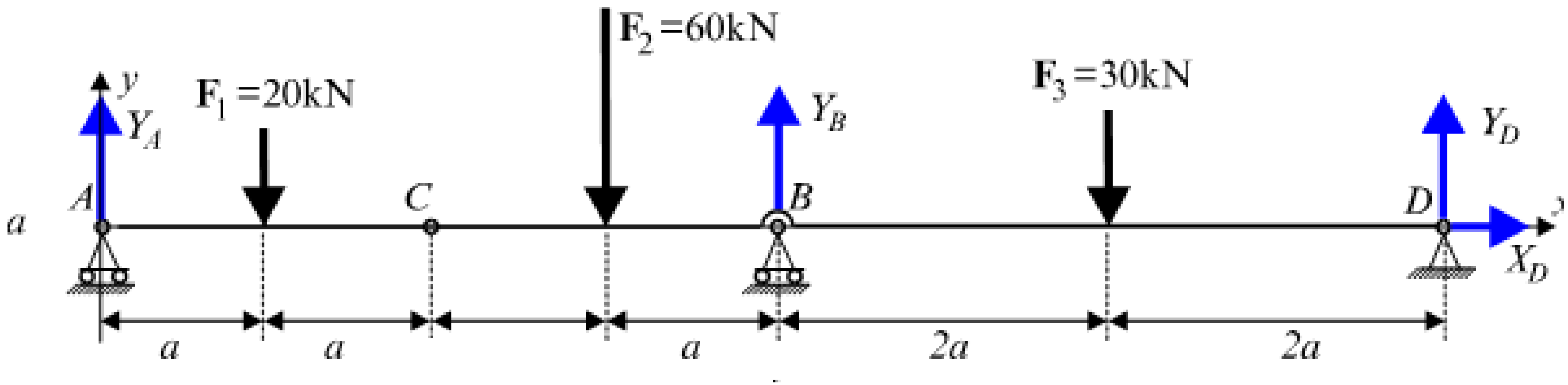
$$\delta W = \mathbf{S} \circ \delta\mathbf{r}_B + \mathbf{Q}\delta\mathbf{r}_Q = -S\delta r_B + Q\delta r_Q = 0$$

$$-S\cdot\delta r_B+Q\cdot\delta r_Q=0\;\rightarrow\;0=-c\lambda\cdot\delta r_B+Q\cdot\delta r_Q=-c\lambda\cdot OA\cdot r_2\frac{\delta r_Q}{r_1\cdot r_3}\frac{\cos\left(\beta-90^\circ\right)}{\cos\alpha}+Q\cdot\delta r_Q\;\rightarrow$$

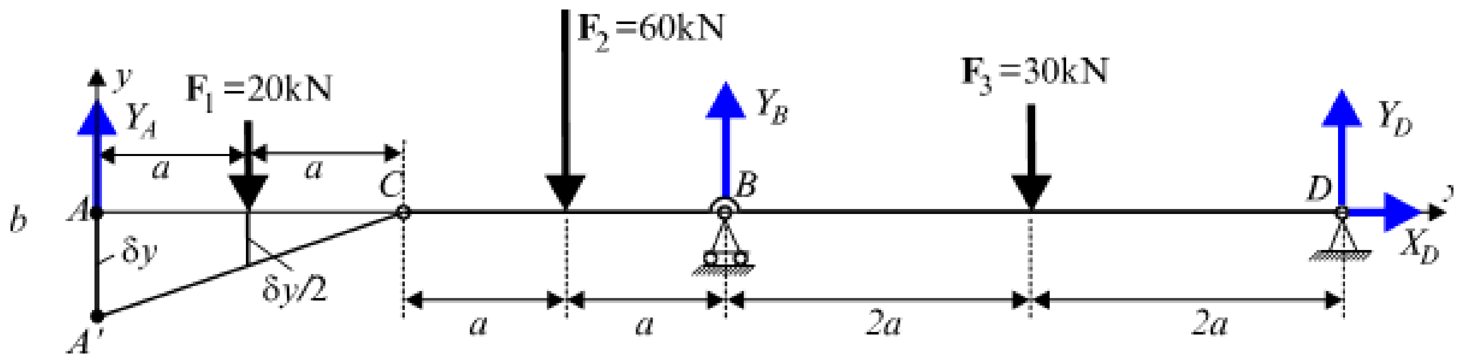
$$-c\lambda\cdot l\cdot r_2\frac{1}{r_1\cdot r_3}\frac{\cos\left(\beta-90^\circ\right)}{\cos\alpha}+Q=0\;\rightarrow$$

$$\lambda=\frac{Qr_1\cdot r_3\cos\alpha}{c\cdot l\cdot r_2\cos\left(\beta-90^\circ\right)}$$

Przegubowa belka , podparta na trzech podporach, składa się z dwóch części połączonych przegubem C. Wyznaczyć reakcje podporowe w punktach A, B i D.



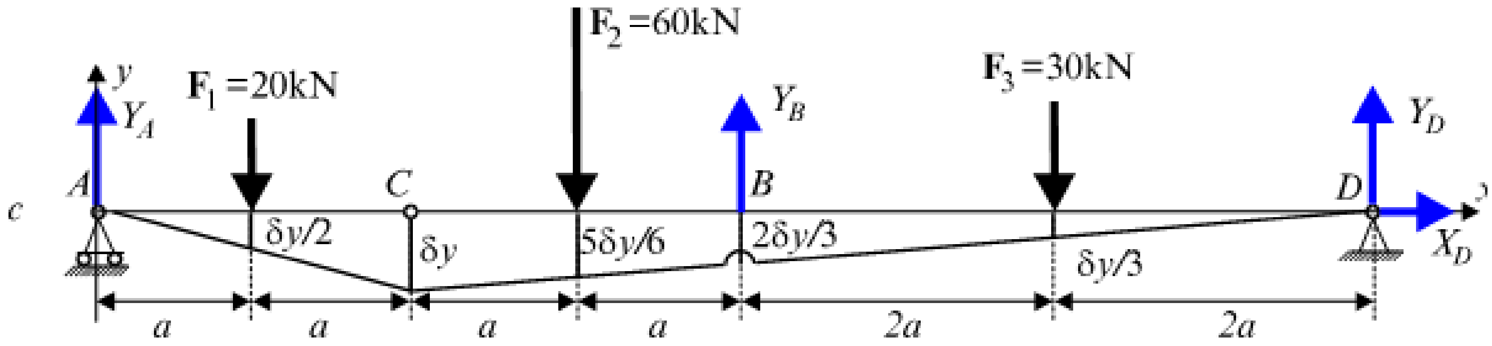
Zastępujemy oddziaływanie podpór reakcjami więzów. Przemieszenia podpór w odpowiednich kierunkach będą przemieszczeniami uogólnionymi. Aby wyznaczyć reakcję Y_A odrzucamy podporę A.



$$\delta y_{F_1} = \delta y / 2$$

$$\delta W = \mathbf{F}_A \circ \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{r}_Q = -Y_A \delta y + F_1 \delta y / 2 = 0 \Rightarrow Y_A = F_{1/2}$$

Aby wyznaczyć reakcję Y_B odrzucamy podporę *B*.

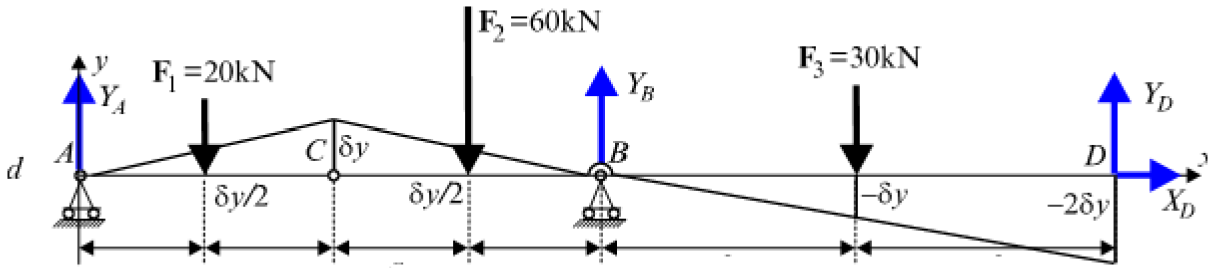


$$\delta y_{F_1} = \delta y / 2 \qquad \delta y_{F_2} = 5\delta y / 6 \qquad \delta y_{F_3} = \delta y / 3$$

$$0 = \mathbf{R}_B \cdot \delta \mathbf{r}_B + \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_2} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_3} = -Y_B \cdot 2\delta y/3 + F_1 \cdot \delta y/2 + F_2 \cdot 5\delta y/6 + F_3 \cdot \delta y/3 \rightarrow$$

$$Y_B = \frac{3}{2}\left(\frac{F_1}{2} + \frac{5F_2}{6} + \frac{F_3}{3}\right)$$

Aby wyznaczyć reakcję Y_D odrzucamy podporę D.



$$\delta y_{F_1} = \delta y / 2 \qquad \delta y_{F_2} = \delta y / 2 \qquad \delta y_{F_3} = \delta y$$

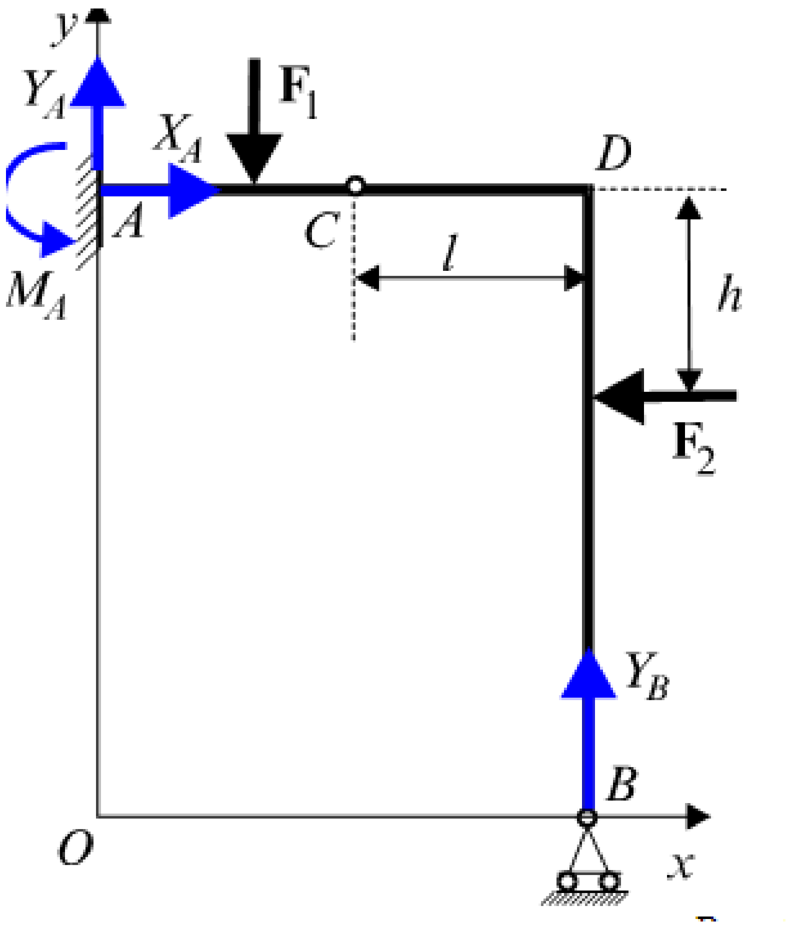
$$0 = \mathbf{R}_D \cdot \delta \mathbf{r}_D + \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_2} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_3} = -Y_D \cdot 2\delta y - F_1 \cdot \delta y/2 - F_2 \cdot \delta y/2 + F_3 \cdot \delta y \;\rightarrow$$

$$Y_D = \frac{1}{2}\left(-\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2} + F_3 \right)$$

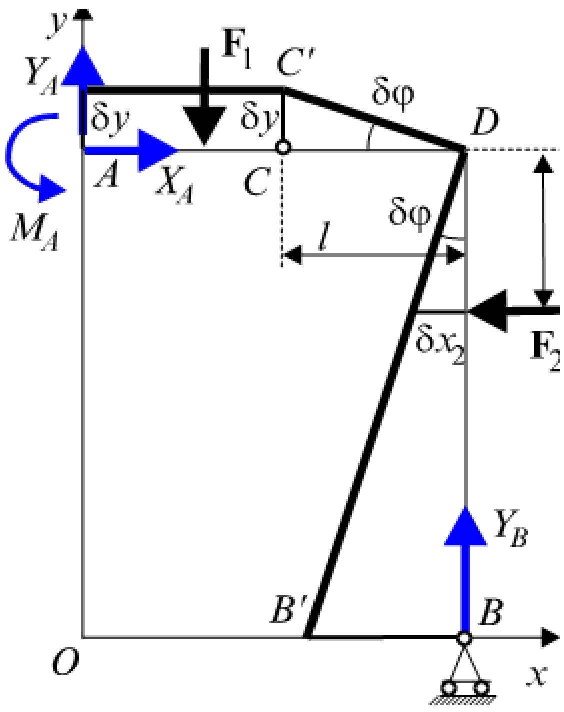
Wyznaczając reakcję X_D odrzucamy podporę i zakładamy, że punkt przemieścił się poziomo o δx. Wszystkie podpory i punkty przyłożenia sił skupionych mają takie same przemieszczenie przygotowane. Ale ponieważ te przemieszczenia są prostopadłe do większości działających sił, to według zasady prac przygotowanych

$$0 = \mathbf{Y}_A \cdot \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{Y}_B \cdot \delta \mathbf{r}_B + \mathbf{Y}_D \cdot \delta \mathbf{r}_D + \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_2} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_3} = 0 + 0 + X_D \cdot \delta x + 0 + 0 + 0 \ \rightarrow \ X_D = 0.$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych wyznaczyć reakcje w utwierdzeniu *A* i podporze ruchomej *B*



W utwierdzeniu działają siły X_A ,Y_A oraz moment M_A. Aby wyznaczyć pionową reakcję Y_A uwalniamy ramę w punkcie od więzów w kierunku pionowym i nadajemy jej w tym punkcie przemieszczenie δy do góry. Przegub C również przemieści się o δy do góry do punktu C`. Punkt $B$ może poruszać się tylko poziomo, więc przemieści się on do punktu $B$` na odcinku OB.



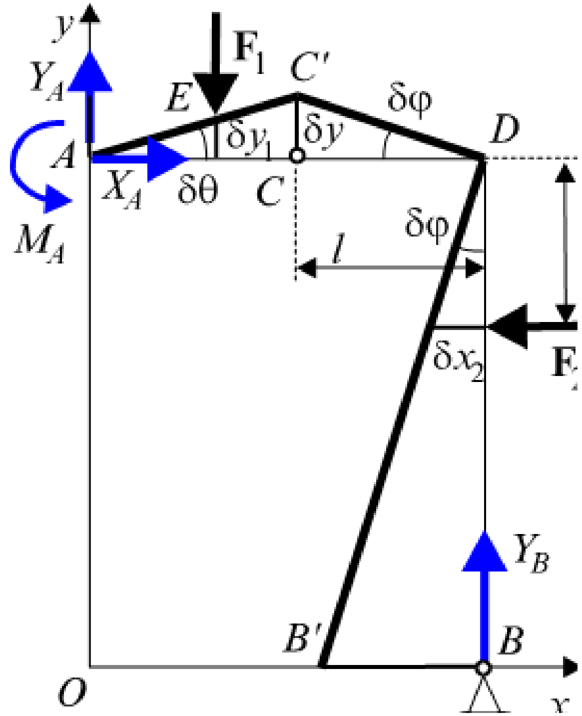
$$\delta y = DC \cdot \delta\varphi \;\rightarrow\; \delta\varphi = \frac{\delta y}{DC} = \frac{\delta y}{l}$$

Siła $\boldsymbol{F}_2$ przemiesza się poziomo o $\delta x_2 = h \cdot \delta\varphi = h\dfrac{\delta y}{l}$

$$0 = Y_A \cdot \delta y + 0 - F_1 \cdot \delta y + F_2 \cdot \delta x_2 = Y_A \cdot \delta y - F_1 \cdot \delta y + F_2 \cdot \delta y \frac{h}{l}$$

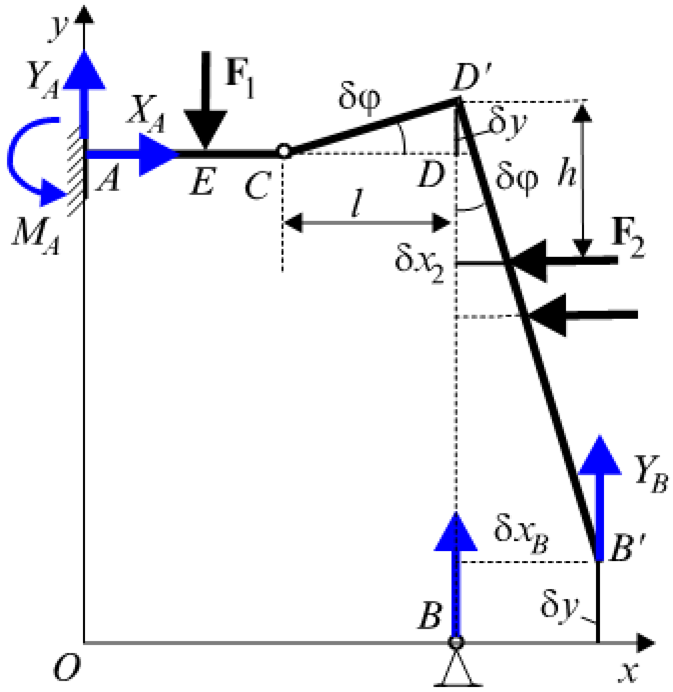
$$Y_A = F_1 - F_2 \frac{h}{l}$$

Do wyznaczenia poziomej reakcji X_A uwalniamy ramę w punkcie *A* od więzów w kierunku poziomym i nadajemy jej w tym punkcie przemieszczenie δx w prawo. Cała konstrukcja (każdy jej punkt) również przemieści się o δx w prawo. Wtedy z zasady prac przygotowanych (obrót w utwierdzeniu jest równy zeru, więc praca przygotowana momentu utwierdzenia też jest równa zeru)



$$0 = X_A \cdot \delta x + 0 - F_2 \cdot \delta x \;\rightarrow\; \underline{X_A = F_2}.$$

Do wyznaczenia pionowej reakcji Y_B uwalniamy ramę w punkcie *B* od więzów w kierunku pionowym i obracamy sztywną część *CDB* względem przegubu *C* o kąt przygotowany $\delta\varphi$. Punkt *D* przemieści się do góry o $\delta y = l\delta\varphi$ do punktu *D'*. Punkt *B* i punkt przyłożenia siły $\boldsymbol{F}_2$ przemieszczają się wraz z punktem *D* oraz obracają się względem *D'* o kąt $\delta\varphi$, znaczy to, że przemieszczają się również do góry o δy oraz w kierunku osi *x* o δx_B i $\delta x_2 = h\delta\varphi$.



$$0 = 0 + Y_B \cdot \delta y + 0 - F_2 \cdot \delta x_2 = Y_B \cdot l\,\delta\varphi - F_2 \cdot h\delta\varphi \rightarrow \underline{Y_B = F_2 \frac{h}{l}}.$$

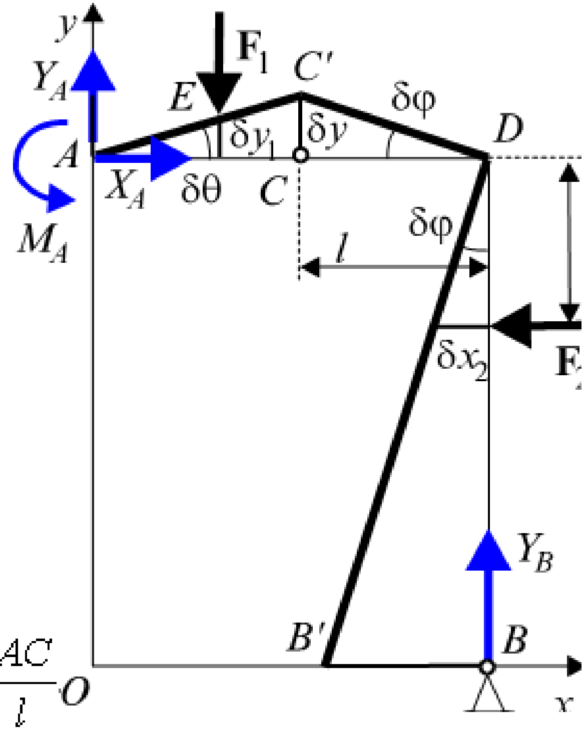
Do wyznaczenia momentu utwierdzenia M_A uwalniamy ramę w punkcie *A* od więzów usztywnienia. Można to sobie wyobrazić tak, że utwierdzenie sztywne zamieniamy na podporę stałą. Obracamy część *AC* względem *A* o kąt przygotowany $\delta\theta$ (przemieszczenie postępowe punktu *A* jest równe zeru). To spowoduje przemieszczenie punktu *E*, w którym przyłożono siłę $\boldsymbol{F_1}$ o $\delta y_1 = AE\delta\theta$ do góry oraz przemieszczenie przegubu *C* o $\delta y = AC\delta\theta$ do góry. Przemieszczenia sztywnej części *CDB* są takie, jak w przypadku obliczania reakcji Y_A:

kąt obrotu $\delta\varphi$ względem środka *D*

$$\delta y = l \cdot \delta\varphi \;\rightarrow\; \delta\varphi = \frac{\delta y}{l} = \frac{AC \cdot \delta\theta}{l}$$

poziome przemieszenie siły $\boldsymbol{F}_2$ $\quad \delta x_2 = h \cdot \delta\varphi = h\dfrac{AC \cdot \delta\theta}{l}$

pionowe przemieszczenie punktu *B* jest równe zeru



$$0 = M_A\delta\theta + 0 + 0 - F_1 \cdot \delta y_1 + F_2 \cdot \delta x_2 =$$

$$= M_A\delta\theta - F_1 \cdot AE \cdot \delta\theta + F_2 \cdot h\frac{AC \cdot \delta\theta}{l} \;\rightarrow\; \underline{M_A = F_1 \cdot AE - F_2 \cdot h\frac{AC}{l}}$$