


# Najogólniejsza zasada statyki (Zasada prac przygotowanych)

Jeśli mamy statykę (bezruch) to przyspieszenie i prędkość jest równa 0

Czyli

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = 0$$


=0

Stąd

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

Na to by pewne (zgodne z więzami) położenie układu było jego położeniem równowagi potrzeba i wystarczy aby w tym położeniu suma prac sił aktywnych na dowolnych przemieszczeniach wirtualnych była równa zero.



podstawiamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i d\bar{r}_i &= mg\bar{j} \left[ \left( \frac{a}{2} \cos\alpha d\alpha \right) \bar{i} - \left( \frac{a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) \bar{j} \right] + mg\bar{j} \left[ \left( \frac{a}{2} \cos\alpha d\alpha \right) \bar{i} - \left( \frac{3a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) \bar{j} \right] + \\ &+ F\bar{i} \left[ (a \cos\alpha d\alpha) \bar{i} - (a \sin\alpha d\alpha) \bar{j} \right] + mg\bar{j} \left[ \left( -\frac{a}{2} \cos\alpha d\alpha \right) \bar{i} - \left( \frac{a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) \bar{j} \right] + mg\bar{j} \left[ \left( -\frac{a}{2} \cos\alpha d\alpha \right) \bar{i} - \left( \frac{3a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) \bar{j} \right] \\ &- F\bar{i} \left[ (-a \cos\alpha d\alpha) \bar{i} - (a \sin\alpha d\alpha) \bar{j} \right] = 0 \end{aligned}$$

**Przypomnienie:** z iloczynu skalarnego wiemy, że  $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = 1$ , a  $\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$

Stąd mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i d\bar{r}_i &= -mg \left( \frac{a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) - mg \left( \frac{3a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) + \\ &+ F (a \cos\alpha d\alpha) - mg \left( \frac{a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) - mg \left( \frac{3a}{2} \sin\alpha d\alpha \right) + F (a \sin\alpha d\alpha) = (-4mga \sin\alpha + 2Facos\alpha) d\alpha = 0 \end{aligned}$$

ma być prawdziwe dla dowolnego  $d\alpha$

$$-4mga \sin\alpha + 2Facos\alpha = 0$$

Odp.  $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{2mg}$

# Więzy i siły uogólnione

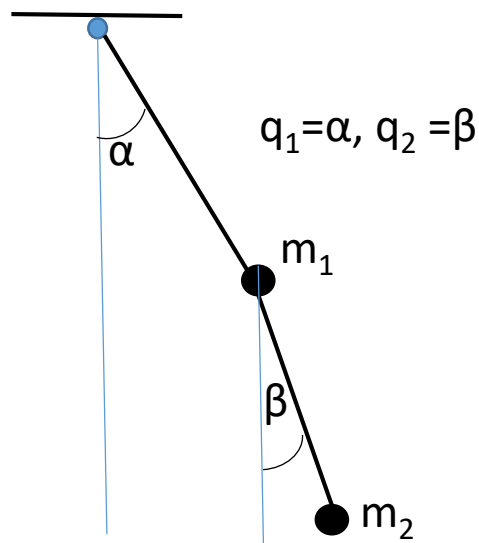
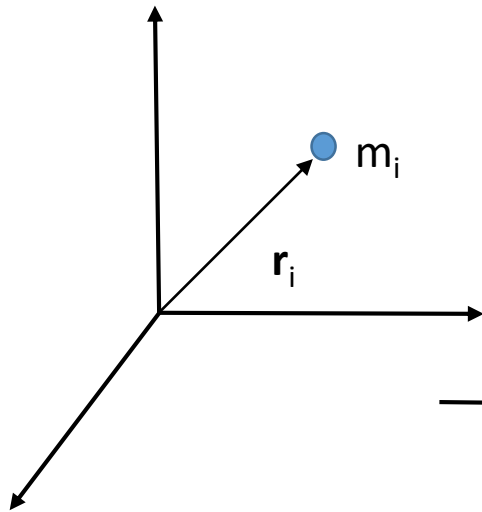
- a) zbiór mas  $m_i\{\bar{r}_i\}$
- b) więzy  $g_v(\bar{r}_i, t) = 0$
- c)  $s=3n-k$  liczba stopni swobody - oznaczmy jako  $N$

Wprowadźmy bazę współrzędnych uogólnionych (tyle ile stopni swobody)  $q_1, q_2, \dots, q_N$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$$

Ruch punktu swobodnego w **przestrzeni konfiguracji (we wsp. uogólnionych)** określa ruch układu.

Jak wyznaczymy  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$  to wyznaczymy  $\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \dots, \bar{r}_n(t)$



wyznaczanie przemieszczeń przygotowanych ze współrzędnych uogólnionych

$$\dot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \quad \text{pomnożymy przed } dt \quad (\dot{q}_j - \text{prędkość uogólniona})$$

$$d\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} dt$$

dla dwóch różnych  $d\bar{r}_i'$  i  $d\bar{r}_i''$

$$d\bar{r}_i' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j' + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} dt$$

$$(-) \quad d\bar{r}_i'' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j'' + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} dt$$

po odjęciu  
dostaniemy

---

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} (dq_j' - dq_j'') = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

# Zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych przyjmuje postać

N-liczba stopni swobody, n-liczba punktów materialnych

$$\bar{Q}\delta\bar{q} = \sum_{m=1}^N Q_m \delta q_m = \text{ma być równe} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \left[ \sum_{m=1}^N \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m \right] = \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m$$

$$\bar{Q}\delta\bar{q} = \sum_{m=1}^N Q_m \delta q_m = \text{ma być równe} = \sum_{m=1}^N \delta q_m \left[ \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \right]$$



$Q_m$  Siła uogólniona

Siła uogólniona

$$Q_m = \left[ \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \right]$$

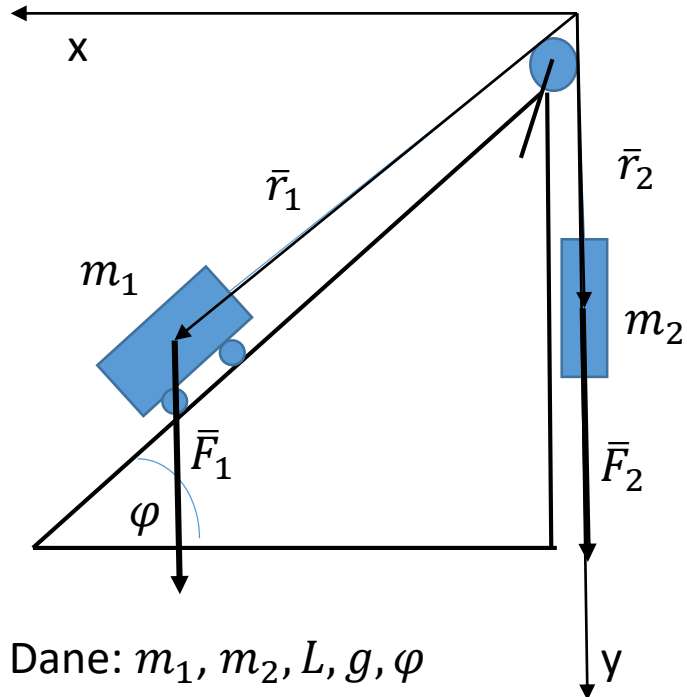
praca

$$Q_m = \frac{\delta W_m}{\delta q_m}$$

Siła uogólniona nie musi być w Newtonach!!!!

przykład

Stosując zasadę d'Alemberta oblicz przyspieszenie punktów materialnych układu oraz siłę w linie



długość liny

$$n=2 \quad \vec{r}_1 = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}, \quad \vec{r}_2 = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$$

„m” równań więzów

$$\begin{aligned} z_1 = 0, z_2 = 0 \\ \frac{y_1}{x_1} = \text{tg } \varphi, \quad x_2 = 0 \\ \sqrt{y_1^2 + x_1^2} + y_2 - L = 0 \end{aligned}$$

jeden stopień swobody

$$N=3n-m=1$$

Więzy nie zależą od czasu (skleronomiczne)

$$\delta \vec{r}_j \equiv d\vec{r}_j$$

Ogólne równanie dynamiki

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) d\vec{r}_i = (\vec{F}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1) d\vec{r}_1 + (\vec{F}_2 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2) d\vec{r}_2 = 0$$

Siły aktywne

$$\vec{F}_1 = m_1 g \bar{j}, \quad \vec{F}_2 = m_2 g \bar{j},$$

cd.

$$\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}, \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{r}}_1 = \dot{x}_1\bar{i} + \dot{y}_1\bar{j}, \quad \rightarrow \quad \ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{x}_1\bar{i} + \ddot{y}_1\bar{j}$$

$$\bar{r}_2 = y_2\bar{j}, \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{r}}_2 = \dot{y}_2\bar{j}, \quad \rightarrow \quad \ddot{\bar{r}}_2 = \ddot{y}_2\bar{j}$$

↓ | \*dt

$$d\bar{r}_1 = dx_1\bar{i} + dy_1\bar{j},$$

$$d\bar{r}_2 = dy_2\bar{j}$$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i\ddot{\bar{r}}_i)d\bar{r}_i = (m_1g\bar{j} - m_1(\ddot{x}_1\bar{i} + \ddot{y}_1\bar{j}))(dx_1\bar{i} + dy_1\bar{j}) + (m_2g\bar{j} - m_2(\ddot{y}_2\bar{j}))(dy_2\bar{j}) =$$

$$= m_1g dy_1 - m_1\ddot{x}_1 dx_1 - m_1\ddot{y}_1 dy_1 + m_2g dy_2 - m_2\ddot{y}_2 dy_2 = 0$$

wszystko uzależniamy od  $x_1$

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \varphi$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 \operatorname{tg} \varphi$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 \operatorname{tg} \varphi$$

$$dy_1 = dx_1 \operatorname{tg} \varphi$$

$$\sqrt{y_1^2 + x_1^2} + y_2 = \sqrt{x_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + x_1^2} + y_2 = x_1 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} + y_2 = x_1 \frac{1}{\cos \varphi} + y_2 = L$$

$$y_2 = L - x_1 \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\dot{y}_2 = -\dot{x}_1 \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$dy_2 = -dx_1 \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{x}_1 \frac{1}{\cos \varphi}$$



$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) d\bar{r}_i = m_1 g \operatorname{tg} \varphi dx_1 - m_1 \ddot{x}_1 dx_1 - m_1 \ddot{x}_1 \operatorname{tg}^2 \varphi dx_1 - m_2 g \frac{1}{\cos \varphi} dx_1 - m_2 \ddot{x}_1 \frac{1}{\cos^2 \varphi} dx_1 = 0$$

1 trygonometryczna

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} dx_1 (m_1 g \sin \varphi \cos \varphi - m_1 \ddot{x}_1 \cos^2 \varphi - m_1 \ddot{x}_1 \sin^2 \varphi - m_2 g \cos \varphi - m_2 \ddot{x}_1) = 0$$

to ma być prawdziwe dla dowolnego  $dx_1$

=0

czyli

$$\ddot{x}_1 = \frac{\cos \varphi (m_1 g \sin \varphi - m_2 g)}{m_1 + m_2}$$

$$\ddot{y}_1 = \dot{x}_1 \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi (m_1 g \sin \varphi - m_2 g)}{m_1 + m_2}$$

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{x}_1 \frac{1}{\cos \varphi} = -\frac{g(m_1 \sin \varphi - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Siła w linie

$$S = m_2 g - m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g \left( 1 - \frac{m_2 - m_1 \sin \varphi}{m_1 + m_2} \right)$$