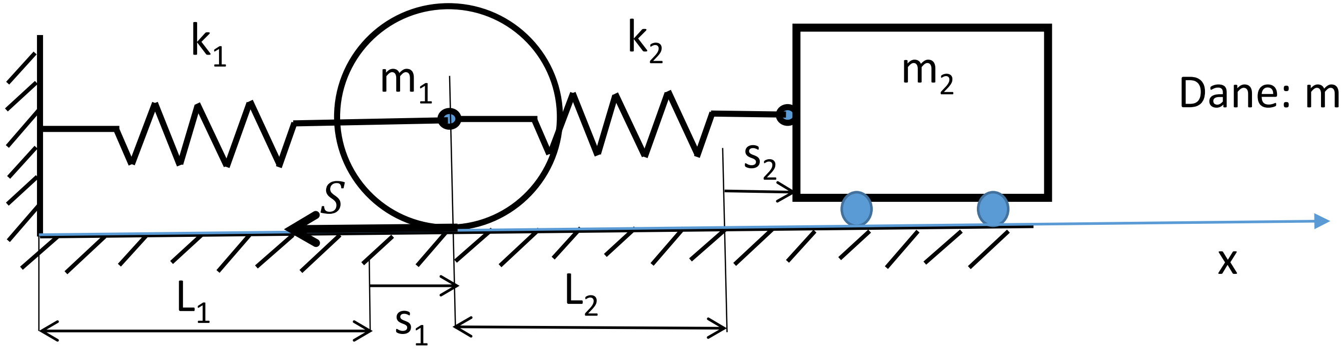
Przykład dynamiki ruchu płaskiego

Napisać równania ruchu.



Dane: $m_1, m_2, k_1, k_2, L_1, L_2$

minus bo po rozciągnięciu sprężyny o s_2 siła w sprężynie ciągnie klocek w przeciwną stronę

s_1 i s_2 to dla nas wydłużenie sprężyny

Siła między krążkiem a podstawą, powodująca, że krążek toczy się bez poślizgu

równanie na m_2 z II zasady dynamiki Newtona: $m_2(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) = -k_2 s_2$

równanie na m_1 z II zasady dynamiki Newtona: $m_1\ddot{s}_1 = -k_1 s_1 + k_2 s_2 - S$

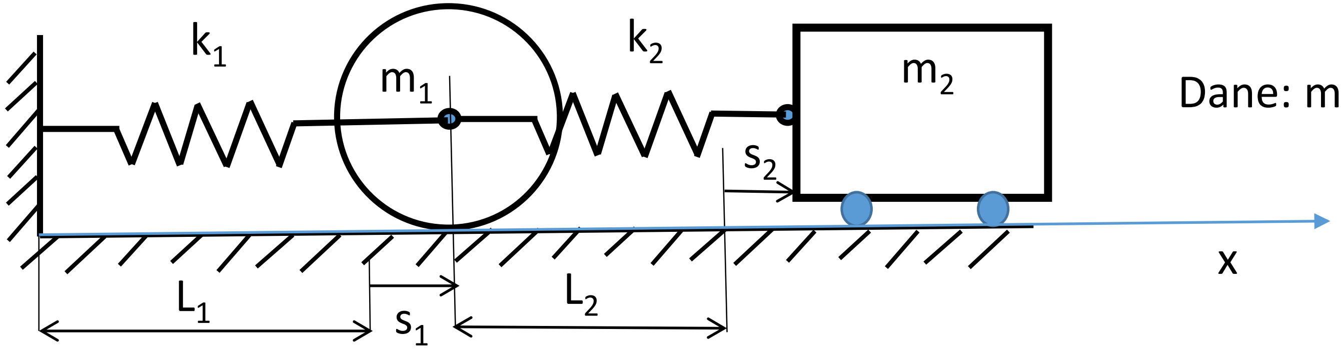
ruch obrotowy $\quad I_o\ddot{\varphi} = S \cdot R \qquad I_o = \dfrac{m_1 R^2}{2} \qquad \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{s}_1}{R}$

$$\frac{m_1 R^2}{2} \cdot \frac{\ddot{s}_1}{R} = S \cdot R \quad \rightarrow \quad S = \frac{m_1 \ddot{s}_1}{2}$$

Odp.

$$\begin{cases} m_2(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + k_2 s_2 = 0 \\ \dfrac{3}{2} m_1 \ddot{s}_1 + k_1 s_1 - k_2 s_2 = 0 \end{cases}$$

Przykład dynamiki ruchu płaskiego – inna metoda, równań energii



Dane: $m_1, m_2, k_1, k_2, L_1, L_2$

Jeśli w układzie nie ma strat energii mechanicznej to suma energii potencjalnej i kinetycznej jest stała.

$$E_k + E_p = const.$$

dla m_1

$$E_{k1} = \frac{m_1 \dot{s}_1^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2} \qquad E_{p1} = \frac{k_1 s_1^2}{2}$$

dla m_1

$$E_{k2} = \frac{m_2 (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^{\,2}}{2} \qquad E_{p2} = \frac{k_2 s_2^2}{2}$$

$$\frac{m_1\dot{s}_1^2}{2}+\frac{I_o\omega_1^2}{2}+\frac{m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^2}{2}+\frac{k_1s_1^2}{2}+\frac{k_2s_2^2}{2}=const.$$

$$I_o=\frac{m_1R^2}{2} \qquad R\cdot\omega_1=\dot{s}_1$$

$$\boxed{\frac{I_o\omega_1^2}{2}=\frac{m_1\dot{s}_1^2}{4}}$$

$$\frac{m_1\dot{s}_1^2}{2}+\frac{m_1\dot{s}_1^2}{4}+\frac{m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^2}{2}+\frac{k_1s_1^2}{2}+\frac{k_2s_2^2}{2}=const.$$

$$\frac{3m_1\dot{s}_1^2}{4}+\frac{m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^2}{2}+\frac{k_1s_1^2}{2}+\frac{k_2s_2^2}{2}=const.$$

$$E_k + E_p = const. \qquad / \cdot \frac{d}{dt}$$

Wtedy

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3m_1\dot{s}_1^2}{4} + \frac{m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^{\,2}}{2} + \frac{k_1 s_1^2}{2} + \frac{k_2 s_2^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3m_1 2\dot{s}_1}{4} \cdot \frac{d}{dt}\dot{s}_1 + \frac{m_2 2(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)}{2} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{s}_1 + \dot{s}_2) + \frac{k_1 2 s_1}{2} \cdot \frac{d}{dt} s_1 + \frac{k_2 2 s_2}{2} \cdot \frac{d}{dt} s_2 = 0$$

$$\frac{3m_1\dot{s}_1}{2} \cdot \ddot{s}_1 + m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2) \cdot (\ddot{s}_1+\ddot{s}_2) + k_1 s_1 \cdot \dot{s}_1 + k_2 s_2 \cdot \dot{s}_2 = 0$$

porządkujemy równania ze względu na $\dot{s}_1$ i $\dot{s}_2$ – układ jest o dwóch stopniach swobody

$$\dot{s}_1\left(\frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2 + k_1 s_1\right) + \dot{s}_2(m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2 + k_2 s_2) = 0$$

Równanie ma być prawdziwe bez względu jakie wartości będą miały prędkości $\dot{s}_1$ i $\dot{s}_2$.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2 + k_1 s_1 = 0 \\ m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2 + k_2 s_2 = 0 \end{cases}$$

Poprzednio było:

$$\begin{cases} m_2(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + k_2 s_2 = 0 \\ \frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + k_1 s_1 - k_2 s_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2 + k_1 s_1 = 0 \\ m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2 + k_2 s_2 = 0 \end{cases}$$

gdy z drugiego równania weźmiemy $m_2\ddot{s}_1 + m_2\ddot{s}_2$ podstawimy $-k_2 s_2$ do pierwszego równania to dostaniemy to samo!!!

Równanie Lagrange'a II rodzaju

Przypomnijmy co to jest siła uogólniona: $Q_l=\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_l}\right]$

Wychodzimy z ogólnego równania dynamiki

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\bar{r}}_i+\bar{F}_i)\delta\bar{r}_i=0$$

N – liczba stopni swobody

$$-\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\bar{r}}_i)\delta\bar{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i\delta\bar{r}_i$$

siła bezwładności

$$\bar{Q}\delta\bar{q}=\sum_{m=1}^{N}Q_m dq_m$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\bar{r}}_i)\delta\bar{r}_i=\bar{B}d\bar{q}=\sum_{m=1}^{N}B_m dq_m$$

ale $\delta\bar{r}_i=\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_m}d\,q_m$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(-m_i\ddot{\bar{r}}_i)\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_m}d\,q_m\right]=\sum_{m=1}^{N}B_m dq_m$$

$$\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_m}\right)\right]dq_m=\sum_{m=1}^{N}B_m dq_m$$

$$B_m=\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_m}\right)=?$$

Sprawdźmy to od drugiej strony

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_m}$$

1 2 3

2 = 1 − 3

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_m} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i\dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)$$

$$d(v^2) = 2v\,dv$$

$$\frac{1}{2}d(v^2) = v\,dv$$

$$\textcircled{2} = \textcircled{1} - \textcircled{3} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)$$

Zakładamy, że

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_m}$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = -\textcircled{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_m}\right)$$

Podobnie jak ostatnio

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_m}\left(m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m}\left(m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)\right)$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \frac{\partial}{\partial q_m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\dot{\bar{r}}_i}{2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\bar{r}}_i)^2 = E_k$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right) = \frac{\partial\, E_k}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m}\right)$$

$$-\sum_{m=1}^{N} B_m dq_m = \sum_{m=1}^{N} Q_m dq_m$$

$$\sum_{m=1}^{N} (B_m + Q_m)dq_m = 0$$

Musi być prawdziwe dla dowolnego dq_m

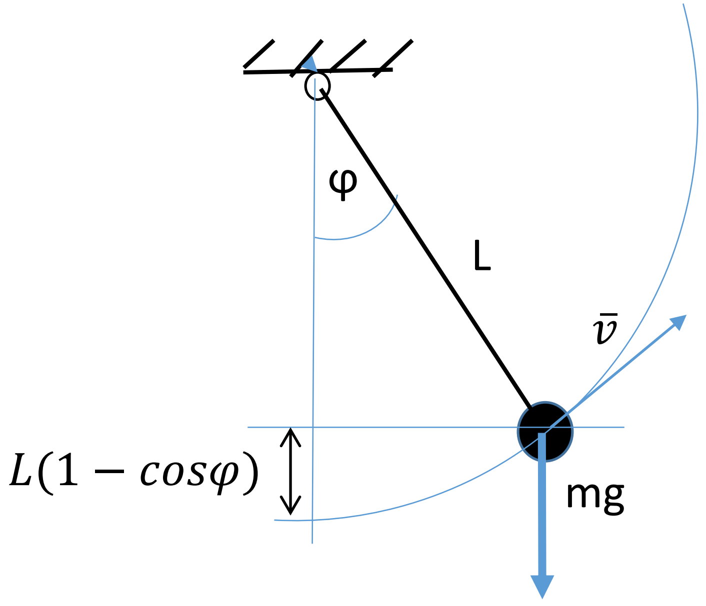
$$B_m + Q_m = 0 \quad \Rightarrow \quad -B_m = Q_m$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial\, E_k}{\partial q_m} = Q_m$$

(m=1,2,…,N)

Wahadło matematyczne



$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad v = \dot{\varphi}L$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2$$

Układ ma jeden stopień swobody

dla $\varphi = 0$ $E_p = 0$

$$E_p = mgL(1-cos\varphi)$$

brak rozpraszania energii, siły tylko potencjalne:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_l} + \frac{\partial E_p}{\partial q_l} = 0$$

obieramy wsp. uogólnioną $q = \varphi$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2} mL^2 \dot{\varphi}^2\right)\right) = \frac{d}{dt}(mL^2 \dot{\varphi}\ ) = mL^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(mgL(1 - cos\varphi)) = mgLsin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_l} + \frac{\partial E_p}{\partial q_l} = mL^2 \ddot{\varphi} + mgLsin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} sin\varphi = 0$$

Równanie ruchu dla wahadła matematycznego

dla małych drgań $sin\varphi = \varphi$ ⇒ $\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0$

$$\omega_w = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega_w^2 x \ = 0$$

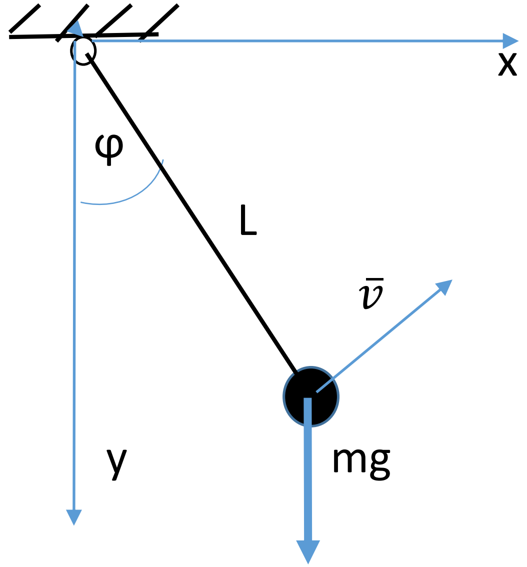
ω_w - częstość drgań własnych

$\omega_w = 2\pi f_w$ ← częstotliwość

$T = \frac{1}{f_w}$ okres drgań

gdybyśmy skorzystali z takiego równania

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q$$



Lewa strona już policzyliśmy poprzednio, więc została na prawa strona

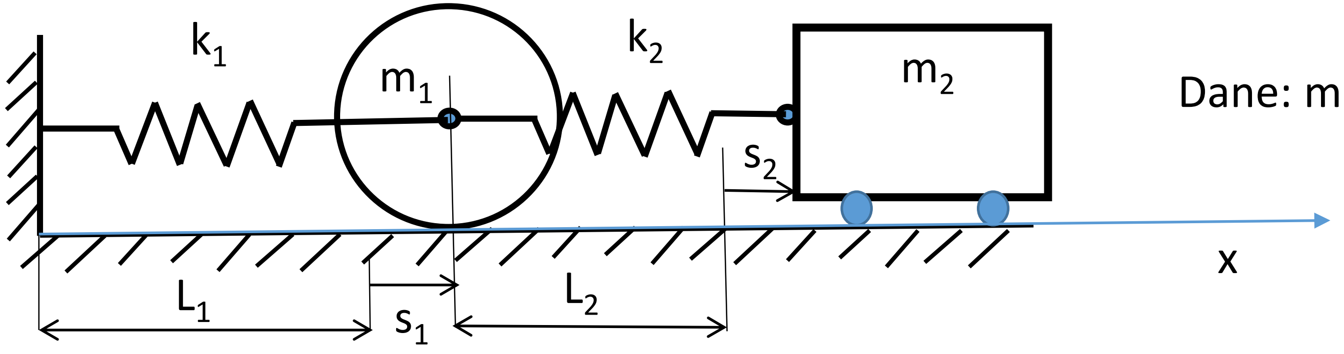
$$Q_l = \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}\right] \qquad l = 1, n = 1$$

jedna współrzędna uogólniona
jeden punkt materialny

$$Q = \bar{F}_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \varphi} = mg\bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}(Lsin\varphi\bar{\imath} + Lcos\varphi\bar{j}) = mg\bar{j} \cdot (Lcos\varphi\bar{\imath} - Lsin\varphi\bar{j}) = -Lmgsin\varphi$$

po przeniesieniu na lewą stronę zmienimy znak i dostaniemy dokładnie to samo.

Zadanie: Równanie Lagrange'a II rodzaju



Dane: $m_1, m_2, k_1, k_2, L_1, L_2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial\, E_k}{\partial q_m} = Q_m$$

dla m_1 $\quad E_{k1} = \frac{m_1 \dot{s}_1^2}{2} + \frac{I_0 \omega_1^2}{2}$ $\quad q_1 = s_1$

$$Q_m = \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\right]$$

dla m_2 $\quad E_{k2} = \frac{m_2(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^{\,2}}{2}$ $\quad q_2 = s_2$

$$I_o = \frac{m_1 R^2}{2} \qquad R \cdot \omega_1 = \dot{s}_1$$

$$\boxed{\frac{I_o \omega_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{s}_1^2}{4}}$$

$$E_k = \frac{m_1 \dot{s}_1^2}{2} + \frac{I_0 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^{\,2}}{2} = \frac{3 m_1 \dot{s}_1^2}{4} + \frac{m_2(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^{\,2}}{2}$$

$\bar{r}_1 = (l_1 + s_1)\bar{\imath} \qquad \bar{r}_2 = (l_1 + s_1 + l_2 + s_2)\,\bar{\imath}$

$\bar{F}_1 = (-s_1 k_1 + s_2 k_2)\bar{\imath} \qquad \bar{F}_2 = -s_2 k_2 \bar{\imath}$

Układ ma dwa stopnie swobody więc m=1,2

m=1

$$Q_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}\,\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial s_1}\right] = \overline{F_1}\,\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial s_1} + \overline{F_2}\,\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial s_1} = (-s_1 k_1 + s_2 k_2)\bar{\imath}\cdot\bar{\imath} - s_2 k_2 \bar{\imath}\cdot\bar{\imath} = -s_1 k_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{3m_1\dot{s}_1^2}{4} + \frac{m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^{\,2}}{2}\right)}{\partial \dot{s}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3m_1\dot{s}_1}{2} + m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_1}\right) = \frac{3m_1\ddot{s}_1}{2} + m_2(\ddot{s}_1+\ddot{s}_2) \qquad \frac{\partial\, E_k}{\partial s_1} = 0$$

Czyli pierwsze równanie będzie miało postać

$$\frac{3m_1\ddot{s}_1}{2} + m_2(\ddot{s}_1+\ddot{s}_2) + s_1k_1 = 0$$

m=2

$$Q_2 = \overline{F_1}\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial s_2} + \overline{F_2}\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial s_2} = -s_2k_2\bar{\imath}\cdot\bar{\imath} = -s_2k_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{3m_1\dot{s}_1^2}{4} + \frac{m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^{\ 2}}{2}\right)}{\partial \dot{s}_2}\right) = \frac{d}{dt}(m_2(\dot{s}_1+\dot{s}_2)) = m_2(\ddot{s}_1+\ddot{s}_2)$$

$$\frac{\partial\ E_k}{\partial s_2} = 0 \qquad\qquad m_2(\ddot{s}_1+\ddot{s}_2) + s_2k_2 = 0$$

$$\frac{3m_1\ddot{s}_1}{2} + m_2(\ddot{s}_1+\ddot{s}_2) + s_1k_1 = 0$$

$$m_2(\ddot{s}_1+\ddot{s}_2) + s_2k_2 = 0$$