

Drgania swobodne układu o wielu stopniach swobody

W przypadku układów o wielu stopniach swobody równania możemy zapisać w postaci macierzowej

macierz mas

macierz sztywności


$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Rozwiązanie powyższego równania zakładamy w postaci harmoniczej

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \sin(\omega_0 t)$$

więc

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

Po podstawieniu dostaniemy

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{q}_0 \sin(\omega_0 t) = \mathbf{0}$$

To równanie ma być prawdziwe dla dowolnej chwili czasu, więc

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$$

Ten układ równań ma rozwiązania niezerowe, gdy spełniony jest warunek

$$\mathit{det}(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) = \mathit{det}(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0$$

Dostaniemy wielomian n-tego stopnia, z którego wyznaczymy „n” częstości drgań własnych.

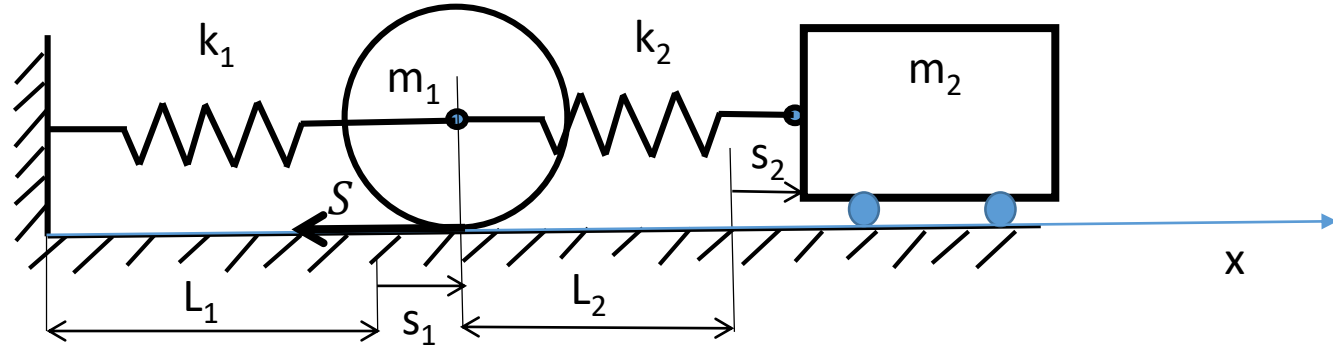
Mając do dyspozycji wyznaczone „n” częstości drgań własnych, dla każdej z ω_{0i} możemy wyznaczyć wektor drgań własnych \mathbf{q}_{0i} .

$$(\mathbf{K} - \omega_{0i}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{q}_{0i} = \mathbf{0}$$

\mathbf{q}_{0i} - obliczamy z dokładnością do stałego mnożnika, bowiem każda wielokrotność właściwego wektora spełnia to równanie, dlatego najczęściej normuje się wektor tak, aby pierwsza składowa wektora lub największa przyjęła wartość 1.

Wektor własny odpowiadający odpowiedniej częstości drgań własnych pokazuje jak układ będzie się zachowywał (drgał) przy danej częstości drgań własnych (pokaże także względne wartości amplitud)

Przykład obliczeniowy



Równania wyznaczyliśmy wcześniej

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + k_1s_1 - k_2s_2 = 0 \\ m_2(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + k_2s_2 = 0 \end{cases}$$

Zapiszmy równania w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

macierz bezwładności (mas)

macierz sztywności

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0 \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \omega_0^2$$

$$\mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1\lambda & 0 \\ m_2\lambda & m_2\lambda \end{bmatrix} \right) = \mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} k_1 - \frac{3}{2}m_1\lambda & -k_2 \\ -m_2\lambda & k_2 - m_2\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\frac{3}{2}m_1m_2\lambda^2 - \left(m_2k_1 + \frac{3}{2}k_2m_1 + k_2m_2 \right)\lambda + k_1k_2 = 0$$

Rozwiązanie:

$$\lambda_{12} = \frac{3k_2m_1 + 2k_1m_2 + 2k_2m_2 \pm \sqrt{-24k_1k_2m_1m_2 + (3k_2m_1 + 2k_1m_2 + 2k_2m_2)^2}}{6m_1m_2}$$

$$\omega_{012}^2 = \lambda_{12}$$

Podstawmy konkretne wartości parametrów

$$m_1=2 \text{ [kg]}, m_2=3 \text{ [kg]}, k_1=10000 \text{ [N/m]}, k_2=20000 \text{ [N/m]}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10000 & -20000 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0$$

$$\mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} 10000 & -20000 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} 10000 & -20000 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3\lambda & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} \right) = \mathbf{det} \left(\begin{bmatrix} 10000 - 3\lambda & -20000 \\ -3\lambda & 20000 - 3\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(10000 - 3\lambda)(20000 - 3\lambda) - 60000\lambda = 2 \cdot 10^8 - 150000\lambda + 9\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1461.49 \quad \omega_{01} = \sqrt{\lambda_1} = 38,23 \quad \lambda_2 = 15205.2 \quad \omega_{02} = \sqrt{\lambda_2} = 123.31$$

Następnie należy wyznaczyć wektory drgań własnych

$$(\mathbf{K} - \omega_{0i}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{q}_{0i} = \mathbf{0}$$

$$\text{dla } \omega_{01} \quad \begin{bmatrix} 10000 - 3\lambda_1 & -20000 \\ -3\lambda_1 & 20000 - 3\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{011} \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{przyjmujemy } q_{011} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 10000 - 3 \cdot 1461.49 & -20000 \\ -3 \cdot 1461.49 & 20000 - 3 \cdot 1461.49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5555.53 & -20000 \\ -4444.47 & 15555.53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z pierwszego równania:

$$5555.53 - 20000 \cdot q_{012} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_{012} = 0.278$$

Z drugiego równania:

$$-4444.47 + 15555.53 \cdot q_{012} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_{012} = 0.286$$

Z jednego i z drugiego równania powinna być ta sama wartość, błędy wynikają z przybliżeń.

Przyjmujemy:

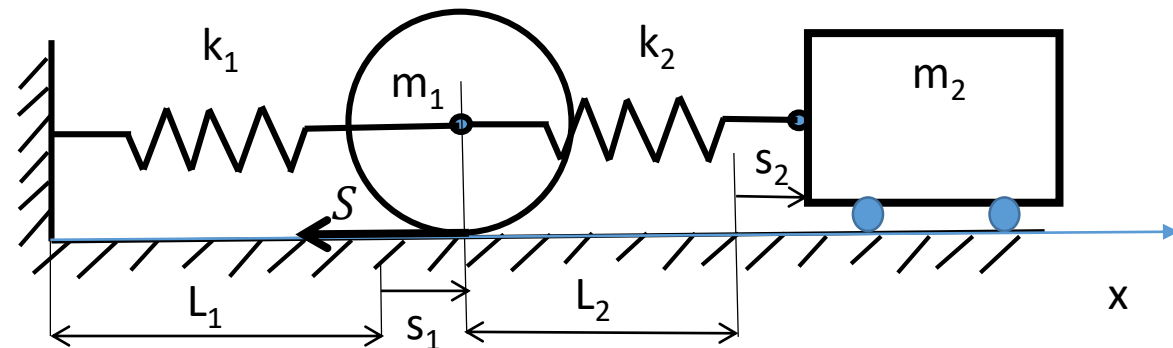
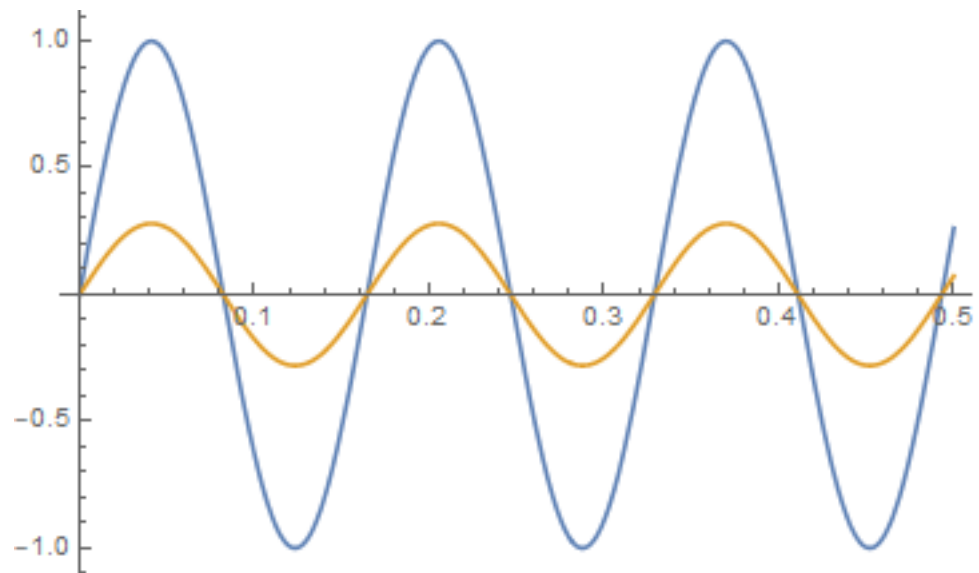
$$q_{011} = 1$$

$$q_{012} = 0.28$$

Przyjmujemy:

$$q_{011} = 1$$

$$q_{012} = 0.28$$



dla ω_{02}

$$\begin{bmatrix} 10000 - 3\lambda_2 & -20000 \\ -3\lambda_2 & 20000 - 3\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{021} \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przyjmujemy $q_{021} = 1$

$$\begin{bmatrix} 10000 - 3 \cdot 15205.2 & -20000 \\ -3 \cdot 15205.2 & 20000 - 3 \cdot 15205.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -35615.6 & -20000 \\ -45615.6 & -25615.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Z pierwszego równania:

$$-35615.6 - 20000 \cdot q_{022} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_{022} = -1.78$$

Z drugiego równania:

$$-45615.6 - 25615.6 \cdot q_{022} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_{022} = -1.78$$

Z jednego i z drugiego równania powinna być ta sama wartość, błędy wynikają z przybliżeń.

Przyjmujemy:

$$q_{011} = 1$$

$$q_{012} = -1.78$$

Przyjmujemy:

$$q_{011} = 1$$

$$q_{012} = -1.78$$

