Ruch dowolny układu

Dowolny ruch naszego układu możemy zawsze przedstawić jako złożenie obu drgań własnych.

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{K} - \omega_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{M}\right) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}) = 0$$

$\omega_{\boldsymbol{0i}}$ - mamy N częstości drgań własnych, wektory własne $\boldsymbol{q_{0i}}$

Czyli rozwiązanie przewidujemy postaci:

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t}) = A_1\boldsymbol{q_{01}}\sin(\omega_{01}t + \varphi_1) + A_2\boldsymbol{q_{02}}sin(\omega_{01}t + \varphi_1)$$

Prędkość będzie:

$$\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{t}) = A_1\omega_{01}\boldsymbol{q_{01}}\cos(\omega_{01}t + \varphi_1) + A_2\omega_{02}\boldsymbol{q_{02}}cos(\omega_{02}t + \varphi_1)$$

$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ - amplitudy i fazy wyznacza się na postawie warunków początkowych:

$$\boldsymbol{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix}$$

Czyli:

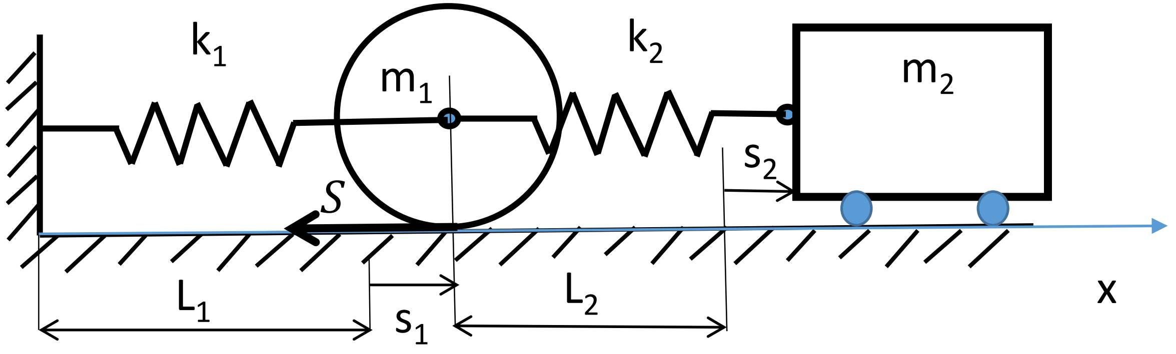
$$\boldsymbol{q}(0) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} \sin(\varphi_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} sin(\varphi_2)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(0) = A_1 \omega_{01} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{012} \end{bmatrix} \cos(\varphi_1) + A_2 \omega_{02} \begin{bmatrix} 1 \\ q_{022} \end{bmatrix} cos(\varphi_2)$$

Cztery równania i cztery niewiadome.

Można wyznaczyć ogólne równania, ale będą dość skompliowane.

Wyznaczymy równania ruchu dla naszego przykładu



$$\begin{bmatrix}\frac{3}{2}m_1 & 0\\ m_2 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{s}_1\\ \ddot{s}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1 & -k_2\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\omega_{01}=\sqrt{\lambda_1}=38{,}23$ $\quad q_{011}=1$ $\quad q_{012}=0.28$

$\omega_{02}=\sqrt{\lambda_2}=123.31$ $\quad q_{021}=1$ $\quad q_{022}=-1.78$

założmy warunki początkowe; $\quad \boldsymbol{q}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{q}}(0)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

czyli: $\quad \boldsymbol{q}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=A_1\begin{bmatrix}1\\0.28\end{bmatrix}\sin(\varphi_1)+A_2\begin{bmatrix}1\\-1.78\end{bmatrix}sin(\varphi_2)$

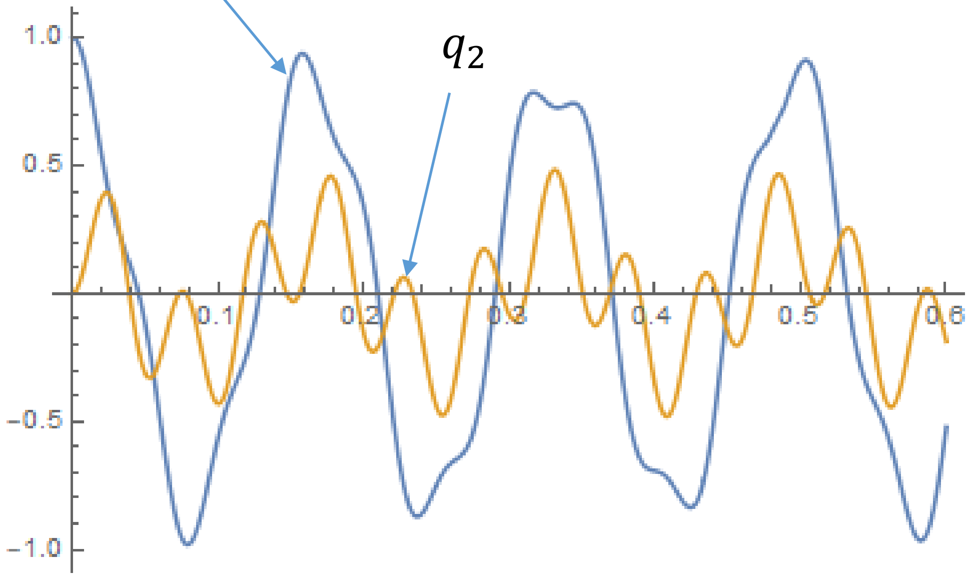
$$\dot{\boldsymbol{q}}(0)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=A_1 38.23\ \begin{bmatrix}1\\0.28\end{bmatrix}\cos(\varphi_1)+A_2 123.31\ \begin{bmatrix}1\\-1.78\end{bmatrix}cos(\varphi_2)$$

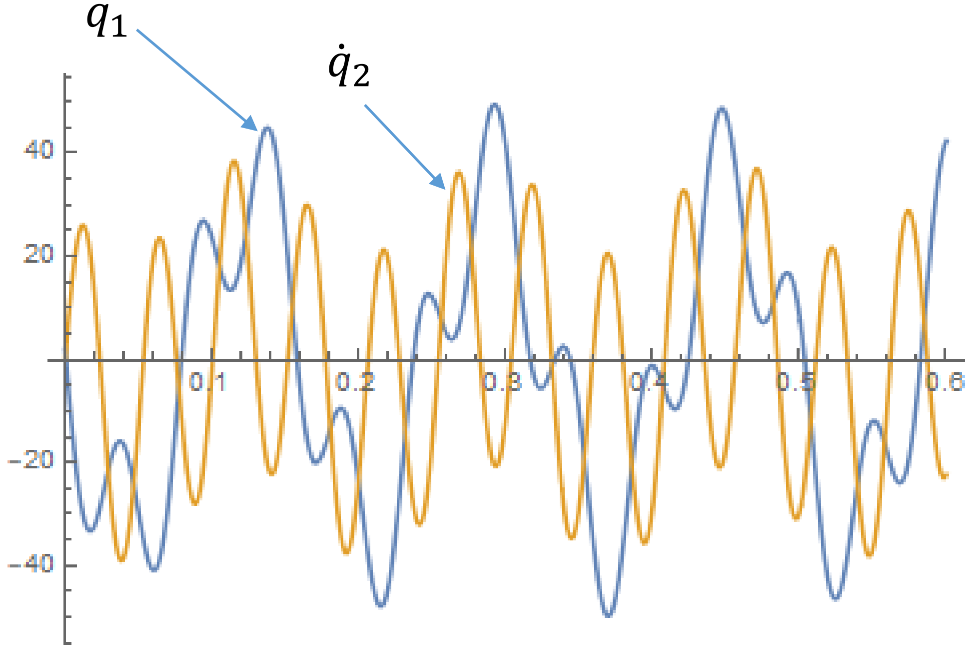
Po rozwiązaniu układu czterech równań dostaniemy cztery rozwiązania, które w zasadzie dają dokładnie te same przebiegi czasowe:

$$A_1 = 0.865, A_2 = 0.136, \varphi_1 = 1.519, \varphi_2 = 1.555$$

co po podstawieniu daje:

$$\boldsymbol{q}(t) = 0.865 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.28 \end{bmatrix} \sin(38.23\, t + 1.519) + 0.136 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 \end{bmatrix} sin(123.31\, t + \varphi_2)$$





Drgania swobodne tłumione

macierz mas

macierz tłumienia

macierz sztywności

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Zakładając, że rozwiązanie jest typu:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_0} e^{rt}$$ gdzie $r = h + i\omega$

czyli

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q_0} r e^{rt}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q_0} r^2 e^{rt}$$

po podstawieniu dostaniemy

$$(\boldsymbol{M} \cdot r^2 + \boldsymbol{C} \cdot r + \boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{q_0} e^{rt} = \boldsymbol{0}$$

$r = h + i\omega$

To równanie ma być prawdziwe dla dowolnej chwili czasu, więc

$$(\boldsymbol{M} \cdot r^2 + \boldsymbol{C} \cdot r + \boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{q_0} = \boldsymbol{0}$$

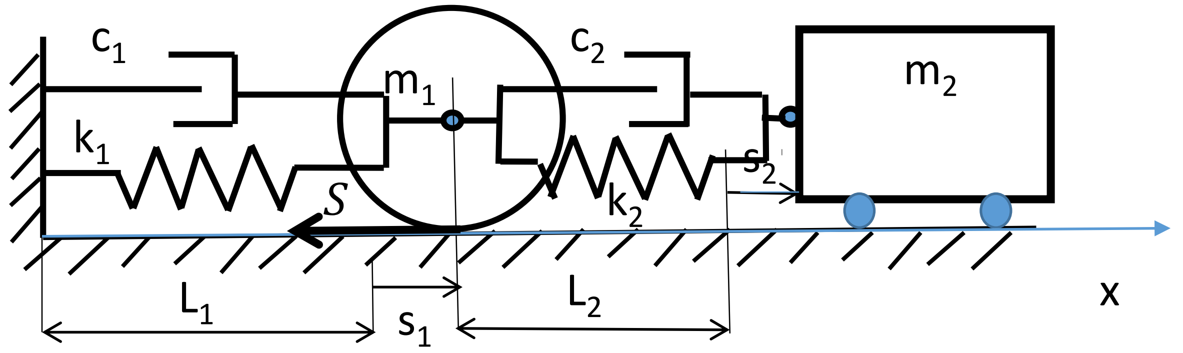
Ten układ równań ma rozwiązania niezerowe, gdy spełniony jest warunek

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{M} \cdot r^2 + \boldsymbol{C} \cdot r + \boldsymbol{K}) = 0$$

Stąd wyznaczymy pierwiastki równania w formie ogólnej:

$r_j = h_j + i\omega_j$ wyznaczymy też wektory własne

Przykład



$$\frac{3}{2}m_1\ddot{s}_1 + c_1\dot{s}_1 - c_2\dot{s}_2 + k_1 s_1 - k_2 s_2 = 0$$

$$m_2(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + c_2\dot{s}_2 + k_2 s_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podstawmy konkretne wartości parametrów

m_1=2 [kg], m_2=3 [kg], c_1=5[Ns/m], c_2=8[Ns/m] k1=10000 [N/m], k_2=20000 [N/m]

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 10000 & -20000 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{M} \cdot r^2 + \boldsymbol{C} \cdot r + \boldsymbol{K}) = 0$$

$$\mathbf{det}\left(\begin{bmatrix} 3r^2 & 0 \\ 3r^2 & 3r^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5r & -8r \\ 0 & 8r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10000 & -20000 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{det}\begin{pmatrix} 3r^2 + 5r + 10000 & -8r - 20000 \\ 3r^2 & 3r^2 + 8r + 20000 \end{pmatrix} = 0$$

$$9r^4 + 64r^3 + 150040r^2 + 180000r + 2 \cdot 10^8 = 0$$

pamiętamy, że rozwiązania zespolone mają do siebie sprzężone:

$$r_1 = -0.355 \mp 38.23i$$

$$r = h + i\omega$$

$$r_2 = -3.144 \mp 123.27i$$

Podstawiając do równania wyznaczamy wektory własne:

$$(\boldsymbol{M} \cdot r^2 + \boldsymbol{C} \cdot r + \boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{q_0} = \boldsymbol{0}$$

dla r_1

$$\begin{bmatrix} 3{r_1}^2 + 5r_1 + 10000 & -8r_1 - 20000 \\ 3{r_1}^2 & 3{r_1}^2 + 8r_1 + 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{011} \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5614 + 109.72\, i & -19997.2 - 305.84\, i \\ -4384.22 - 81.43\, i & 15612.9 + 224.41\, i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{011} \\ q_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przyjmujemy $q_{011} = 1$

$$(5614 + 109.72\, i) \cdot 1 + (-19997.2 - 305.84\, i) \cdot q_{012} = 0$$

$$q_{012} = 0.281 + 0.0012\, i$$

lub z drugiego równania

$$(-4384.22 - 81.43\, i)1 + (15612.9 + 224.41\, i) \cdot q_{012} = 0$$

$$q_{012} = 0.281 + 0.0012\, i$$

wektor własny: $q_{011} = 1$ $q_{012} = 0.281 + 0.0012\, i$

dla r_2 $$\begin{bmatrix} 3{r_2}^2 + 5r_2 + 10000 & -8r_2 - 20000 \\ 3{r_2}^2 & 3{r_2}^2 + 8r_2 + 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{021} \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -35572.5 - 1709.02\, i & -19974.8 - 986.16\, i \\ -45556.8 - 2325.37\, i & -25582 - 1339.21\, i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{021} \\ q_{022} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przyjmujemy $q_{021} = 1$

$$(-35572.5 - 1709.02\, i) \cdot 1 + (-19974.8 - 986.16\, i) \cdot q_{022} = 0$$

$$q_{022} = -1.78 + 0.0024\, i$$

lub z drugiego równania

$$(-45556.8 - 2325.37\, i) \cdot 1 + (-25582 - 1339.21\, i) \cdot q_{022} = 0$$

$$q_{022} = -1.78 + 0.0023\, i$$

wektor własny: $q_{021} = 1$ $q_{022} = -1.78 + 0.0024\, i$

Co to znaczy, że wektory własne są zespolone – ruch mas w rezonansie jest przesunięty w fazie (nie ma takiej zgodności ruchów jak w układzie bez tłumienia).

Czyli rozwiązanie przewidujemy postaci:

$$r_1 = -0.355 \mp 38.23i$$

$$e^{r_1 t}\boldsymbol{q_{01}} = e^{(-0.355+38.23i)t}\,\boldsymbol{q_{01}} = e^{-0.355t}(\cos(38.23t) + i\,sin(38.23t))\begin{bmatrix} 1 \\ 0.281 + 0.0012\,i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-0.355t}cos(38.23t) \\ e^{-0.355t}(0.281\cos(38.23t) - 0.0012\,sin(38.23t)) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{-0.355t}sin(38.23t) \\ e^{-0.355t}(0.0012\cos(38.23t) + 0.281sin(38.23t)) \end{bmatrix}$$

$$r_2 = -3.144 \mp 123.27i$$

$$e^{r_2 t}\boldsymbol{q_{02}} = e^{(-3.144+123.27i\,)t}\,\boldsymbol{q_{02}} = e^{-3.144t}(\cos(123.72t) + i\,sin(123.72t))\begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 + 0.0024\,i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-3.144t}cos(123.72t) \\ e^{-3.144t}(-1.78\cos(123.72t) - 0.0024\,sin(123.72t)) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{-3.144t}sin(123.72t) \\ e^{-3.144t}(0.0024\cos(123.72t) - 1.78sin(123.72t)) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t}) = A_1 \begin{bmatrix} e^{-0.355t} cos(38.23t) \\ e^{-0.355t}(0.281 \cos(38.23t) - 0.0012\, sin(38.23t)) \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} e^{-0.355t} sin(38.23t) \\ e^{-0.355t}(0.0012 \cos(38.23t) + 0.281 sin(38.23t)) \end{bmatrix} +$$

$$+A_3 \begin{bmatrix} e^{-3.144t} cos(123.72t) \\ e^{-3.144t}(-1.78 \cos(123.72t) - 0.0024\, sin(123.72t)) \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} e^{-3.144t} sin(123.72t) \\ e^{-3.144t}(0.0024 \cos(123.72t) - 1.78 sin(123.72t)) \end{bmatrix}$$

Dla warunku początkowego na przemieszczenie $\boldsymbol{q}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.281 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0012 \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{t}) = A_1 \begin{bmatrix} -e^{-0.355t}(0.355\, cos(38.23t) + 38.23 sin(38.23t)) \\ e^{-0.355t}\left(-0.145 \cos(38.23t) - 10.74\, sin(38.23t)\right) \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} e^{-0.355t}(38.23 cos(38.23t) - 0.355 sin(38.23t)) \\ e^{-0.355t}(10.74 \cos(38.23t) + 0.145 sin(38.23t)) \end{bmatrix} +$$

$$+A_3 \begin{bmatrix} -e^{-3.144t}(3.14 cos(123.72t) + 123.72 sin(123.72t)) \\ e^{-3.144t}(5.89 \cos(123.72t) + 220.21\, sin(123.72t)) \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} e^{-3.144t}(123.72\, cos(123.72t) - 3.14 sin(123.72t)) \\ e^{-3.144t}(-220.22 \cos(123.72t) + 5.3 sin(123.72t)) \end{bmatrix}$$

Dla warunku początkowego na prędkość $\dot{\boldsymbol{q}}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A_1 \begin{bmatrix} -0.355 \\ -0.145 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 38.23 \\ 10.74 \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} -3.14 \\ 5.89 \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} 123.72 \\ -220.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Należy teraz rozwiązać układ równań:

$$A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.281 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0012 \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.78 \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \begin{bmatrix} -0.355 \\ -0.145 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 38.23 \\ 10.74 \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} -3.14 \\ 5.89 \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} 123.72 \\ -220.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wyniki

$$A_1 = 0.86, \qquad A_2 = 0.053, \qquad A_3 = 0.14, \qquad A_4 = 0.0057$$

podstawiając wielkości A dostaniemy ruch układu w czasie

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t}) = 0.86\begin{bmatrix} e^{-0.355t}cos(38.23t) \\ e^{-0.355t}(0.281\cos(38.23t) - 0.0012\ sin(38.23t)) \end{bmatrix} + 0.05\begin{bmatrix} e^{-0.355t}sin(38.23t) \\ e^{-0.355t}(0.0012\cos(38.23t) + 0.281sin(38.23t)) \end{bmatrix} +$$

$$+0.14\begin{bmatrix} e^{-3.144t}cos(123.72t) \\ e^{-3.144t}(-1.78\cos(123.72t) - 0.0024\ sin(123.72t)) \end{bmatrix} + 0.0057\begin{bmatrix} e^{-3.144t}sin(123.72t) \\ e^{-3.144t}(0.0024\cos(123.72t) - 1.78sin(123.72t)) \end{bmatrix}$$