MECHANIKA ANALITYCZNA

Piotr Kotowski
Mirosław Bocian

Tematyka wykładu: MMM041005

- zasada prac przygotowanych
- równania Lagrange'a II rodzaju

Literatura:

1. Zawadzki J., Siuta W. Mechanika ogólna
2. Leyko J. Mechanika ogólna
3. J. Misiak, Mechanika ogólna, WNT
4. Giergiel J., Zbiór zadań z mechaniki ogólnej, Wyd. AGH, dostęp elektroniczny
5. Giergiel J., Głuch L., Łopata A., Zbiór zadań z mechaniki: metodyka rozwiązań, Wyd. AGH, dostęp elektroniczny
6. Mieszczerski I.W. Zbiór zadań z mechaniki, PWN
7. Romicki R. Rozwiązania zadań I.W. Mieszczerskiego
8. Nizioł J., Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki, WNT
9. Cz. Witkowski, Zbiór zadań z mechaniki cz. 3, PWr

Textbooks:

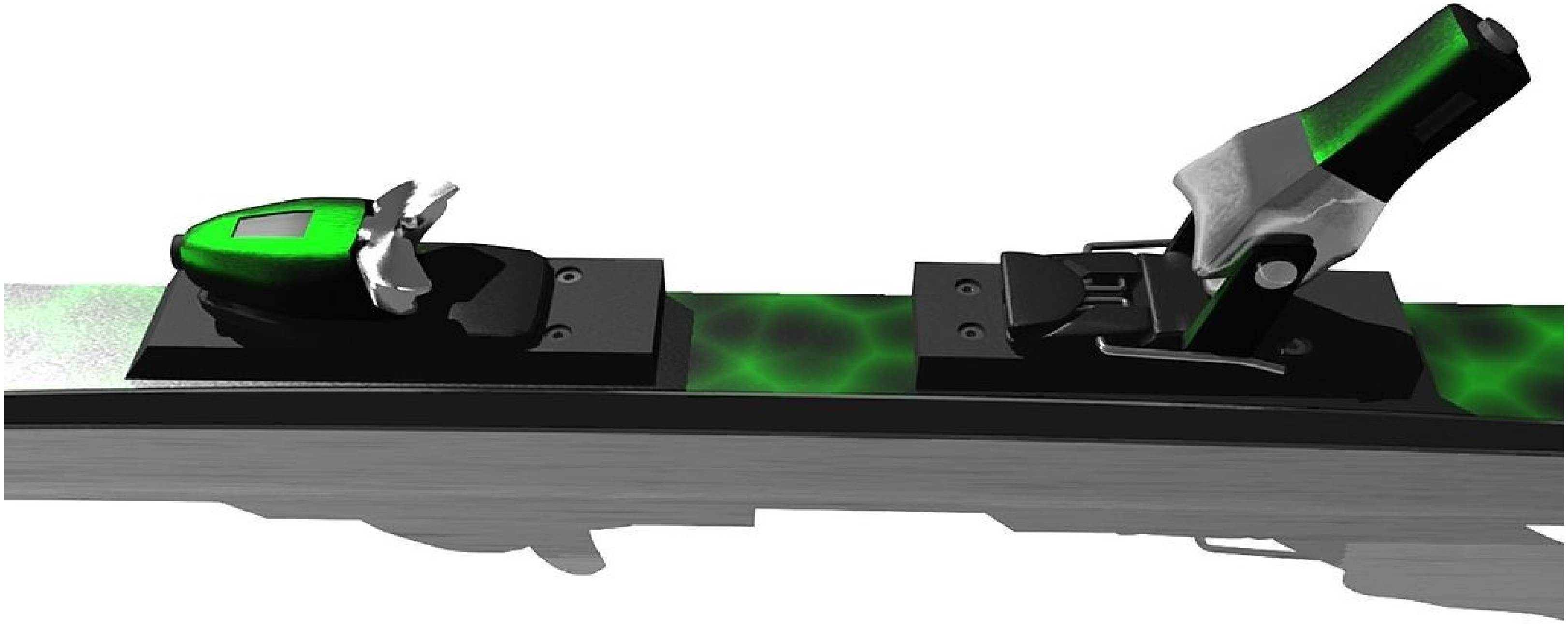
1. Jerry Ginsberg, Engineering Dynamics, Cambridge
2. D. G., W. H., J. Sch., W. A. W., S. G., Engineering Mechanics 3, Springer
3. R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics – Statics, Pearson
4. R.C. Hibbeler, Structural Analysis, Pearson
5. G.W. Housner, D.E. Hudson, Applied Mechanics – Dynamics
6. C. Hartsuijker, J.W. Welleman, Engineering Mechanics, Springer

https://kmim.wm.pwr.edu.pl/kotowski/dydaktyka/mechanika-analityczna

Godziny konsultacji:
Jeszcze podam :-)

Więzy

(l. poj. wiązanie)



Więzy

wszelkiego rodzaju ograniczenia
wpływające na ruch ciała (układu ciał)

ograniczenia: geometryczne lub kinematyczne

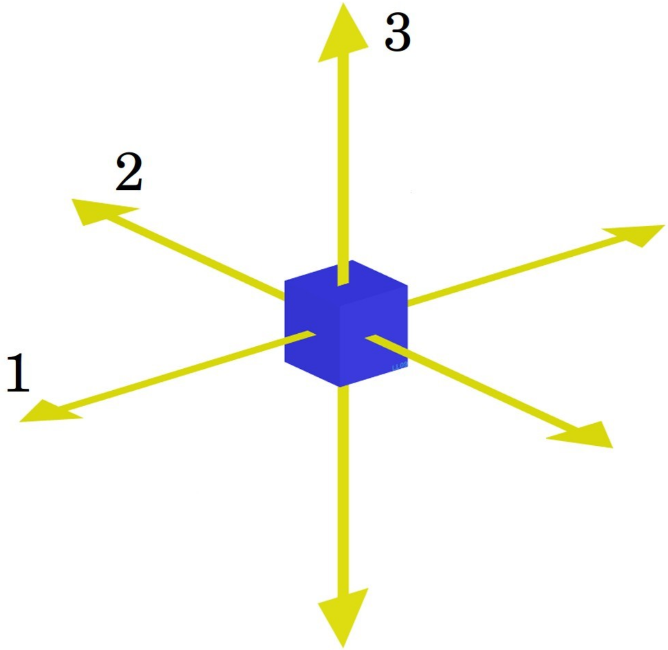
(położenia i prędkości muszą spełniać pewne
warunki, niewynikające z równań ruchu)

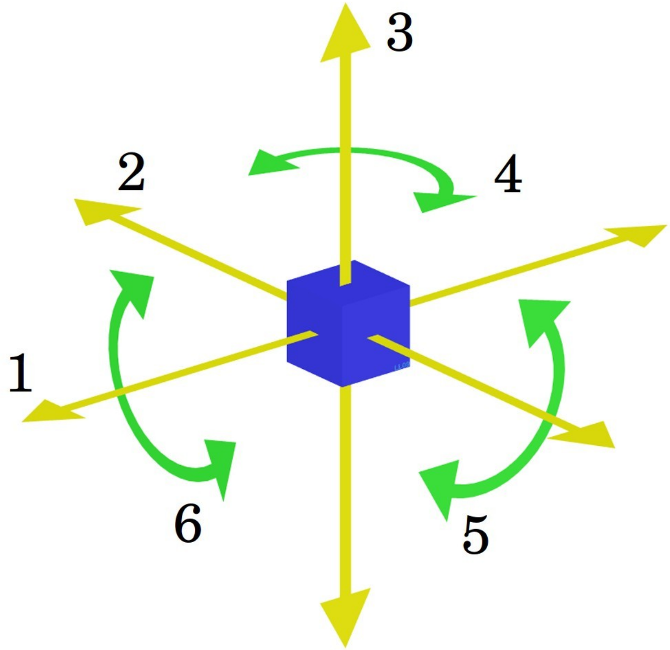
związki analityczne opisujące te warunki
nazywają się równaniami więzów.

$$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$

RUCH SWOBODNY

RUCH SWOBODNY





RUCH NIESWOBODNY

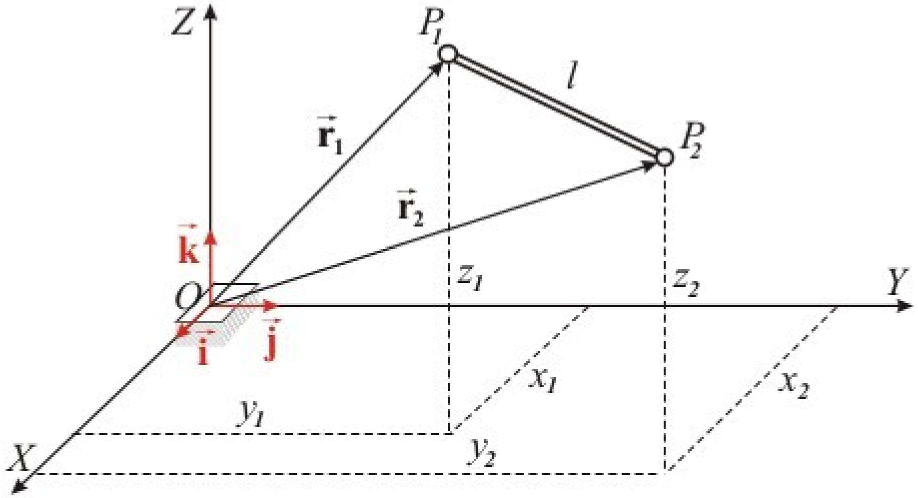
Klasyfikacja więzów

- holonomiczne i nieholonomiczne
- skleronomiczne i reonomiczne
- dwustronne i jednostronne
- idealne

więzy dwustronne

Przykład:

dwa punkty materialne połączone prętem o stałej długości „l”



Równanie więzów:

$$f \equiv (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) - l^2 = 0$$

$$f \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$$

więzy dwustronne

Przykład:

punkt materialny poruszający się ze stałą, co do wartości, prędkością

Równanie więzów:

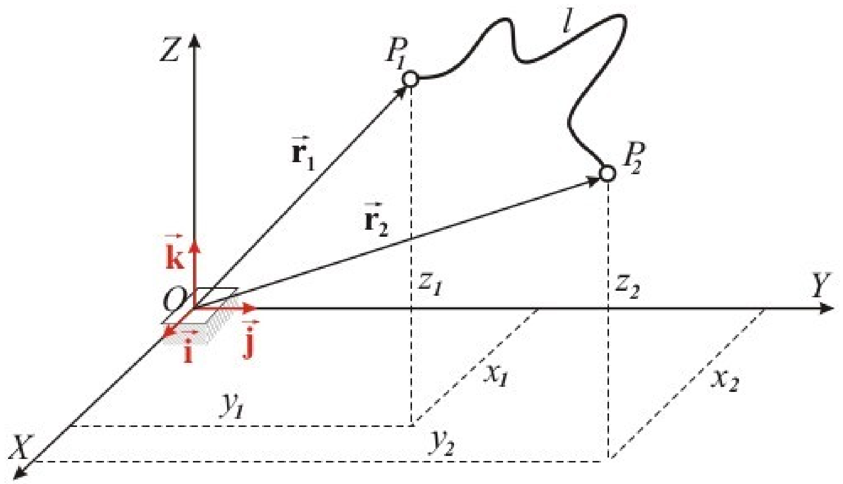
$$f_1 \equiv \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} - v_0^2 = 0$$

$$f_1 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - {v_0}^2 = 0$$

więzy jednostronne

Przykład:

dwa punkty materialne połączone nierozciągliwą nicią o długości „l”



Równanie więzów:

$$f \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 \leq 0$$

więzy jednostronne

Przykład:

punkt materialny poruszający się z prędkością o wartości nie mniejszej od „dopuszczalnej"

Równanie więzów:

$$f_1 \equiv \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} - v_0^2 \geq 0$$

$$f_1 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - v_0^2 \geq 0$$

więzy jednostronne

Przykład:

punkt materialny poruszający się wewnątrz prostopadłościanu o wymiarach a, b, c

Równania więzów:

$$f_1 \equiv x \geq 0 \ , \quad f_2 \equiv a - x \geq 0$$

$$f_3 \equiv y \geq 0 \ , \quad f_4 \equiv b - y \geq 0$$

$$f_5 \equiv z \geq 0 \ , \quad f_6 \equiv c - z \geq 0$$

więzy jedno- i dwustronne

UWAGA:

- liczba więzów dwustronnych jest ograniczona,
- liczba więzów jednostronnych jest nieograniczona
- więzy dwustronne stale ograniczają położenia i ruch punktów
- więzy jednostronne nakładają ograniczenia na położenia i ruch punktów tylko wówczas, gdy są ,,napięte''

więzy holonomiczne
(geometryczne, skończone)

gdy prędkość nie występuje w równaniach więzów,

$$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i\right) = 0$$

więzy nieholonomiczne
(kinematyczne, różniczkowe)

gdy prędkość występuje w równaniach więzów,

$$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$

więzy holonomiczne

Przykład:

punkty materialne pozostają na pewnej poruszającej się płaszczyźnie

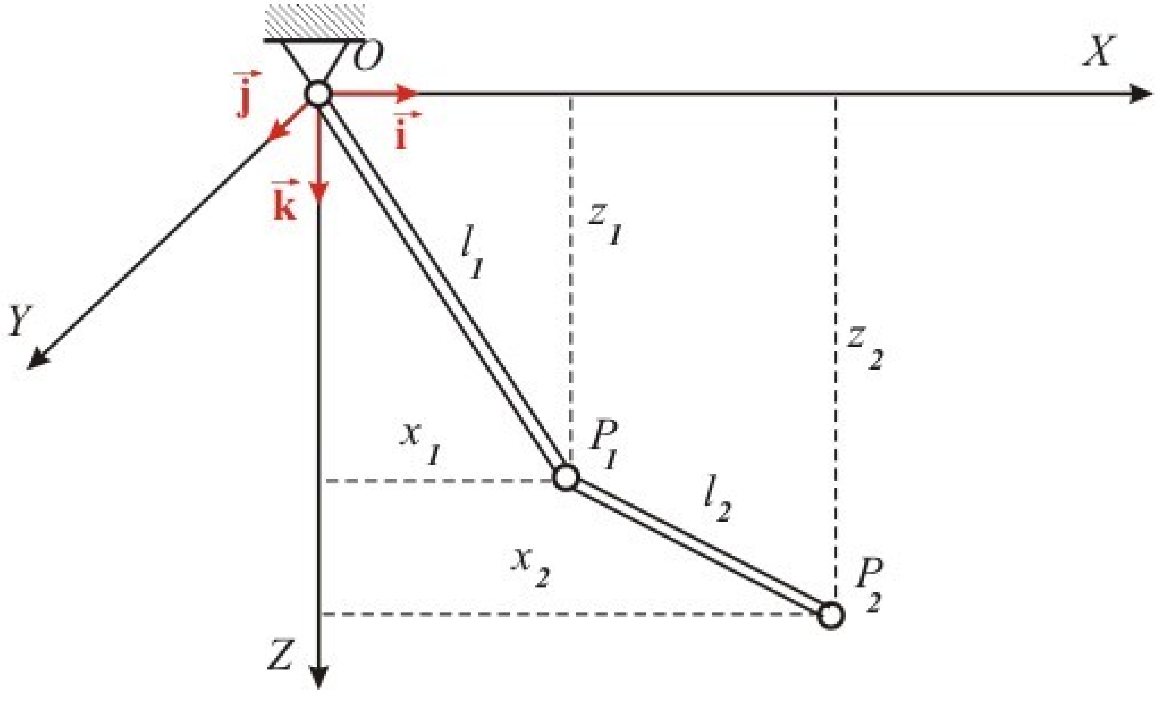
Równanie więzów:

$$f_i \equiv A\,x_i + B\,y_i + C\,z_i - D\,t = 0\ ,\ \ (i = 1,\ldots,N)$$

więzy holonomiczne

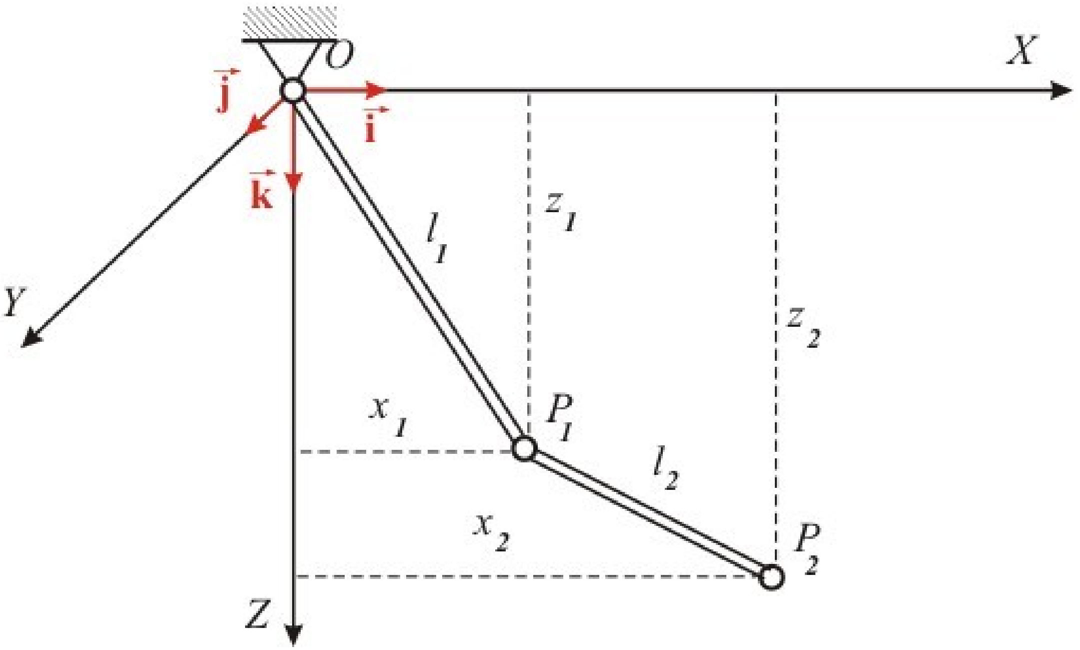
Przykład:

dwa punkty materialne poruszają się w płaszczyźnie XZ będąc połączone prętem, ponadto jeden punkt znajduje się w stałej odległości od nieruchomego punktu O



więzy holonomiczne

Przykład:



Równania więzów:

$$f_1 \equiv y_1 = 0\ ,\ \ f_2 \equiv y_2 = 0$$

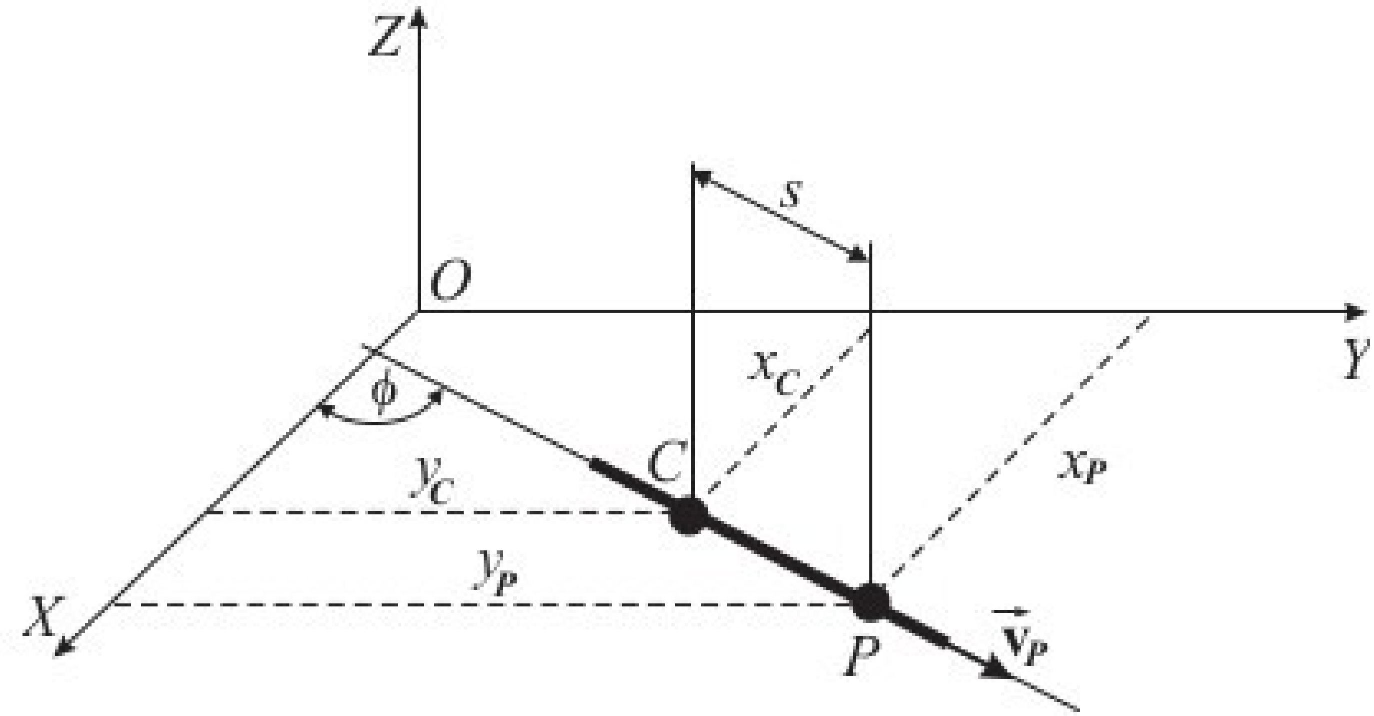
$$f_3 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$f_4 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0$$

więzy nieholonomiczne

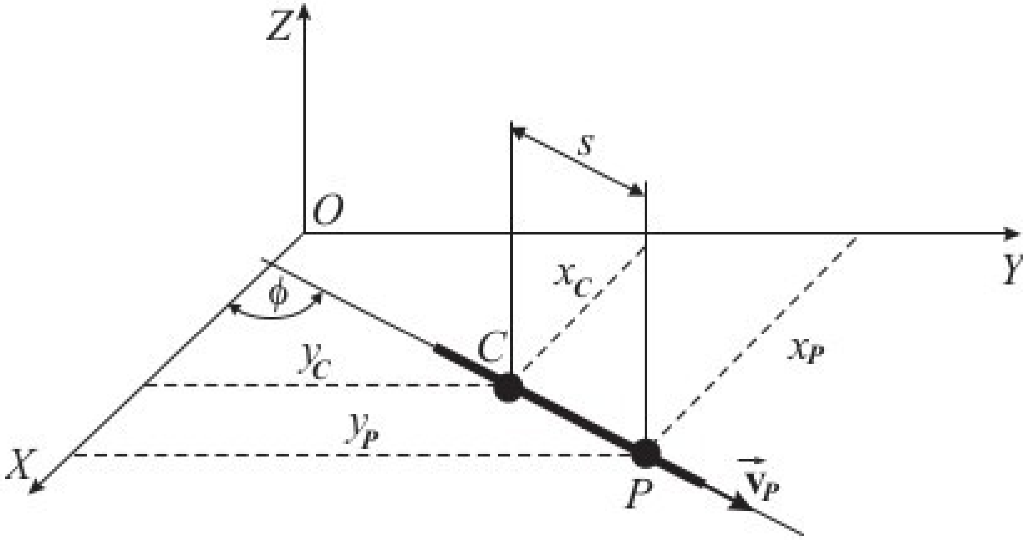
Przykład:

dwa punkty materialne poruszają się na płaszczyźnie XY, pozostając w stałej odległości, ponadto prędkość punktu P ma kierunek prostej łączącej oba punkty (ruch łyżwy na płaszczyźnie)



więzy nieholonomiczne

Przykład:



Równania więzów:

$$f_1:\ z_C = 0\ , \quad f_2:\ z_P = 0$$

$$f_3:\ (x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 - s^2 = 0$$

$$f_4:\ (y_P - y_C)\,\dot{x}_P - (x_P - x_C)\,\dot{y}_P = 0$$

$$\operatorname{tg}\phi = \dot{y}_P/\dot{x}_P \qquad \operatorname{tg}\phi = (y_P - y_C)/(x_P - x_C)$$

więzy skleronomiczne (stacjonarne)

gdy czas nie występuje w równaniach więzów,

$$f_p\left(x_i, y_i, z_i\right) = 0$$

$$f_p\left(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$

więzy reonomiczne (niestacjonarne)

gdy czas występuje w równaniach więzów,

$$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$

więzy reonomiczne

Przykład:

dwa punkty materialne są połączone prętem
o zmiennej długości l=l(t)

Równanie więzów:

$$f_1: \ (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) - l^2(t) = 0$$

$$f_1: \ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2(t) = 0$$

więzy reonomiczne

Przykład:

punkt pozostaje na powierzchni kuli, która porusza się i deformuje R=R(t)

Równanie więzów:

$$f\,(t,x,y,z) = (x - v_{0x}\,t)^2 + (y - v_{0y}\,t)^2 + (z - v_{0z}\,t)^2 - R^2(t) = 0$$

więzy skleronomiczne

Przykład:

dwa punkty połączone prętem o stałej długości i poruszające się po powierzchni sfery o promieniu R

Równania więzów:

$$f_1: \ (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) - l^2 = 0$$

$$f_2: \ \vec{\mathbf{r}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_1 - R^2 = 0 \ , \qquad \mathrm{f}_3: \ \vec{\mathbf{r}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}}_2 - \mathrm{R}^2 = 0$$

$$f_1: \ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0$$

$$f_2: \ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0 \qquad f_3: \ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0$$

Klasyfikacja więzów

- holonomiczne (geometryczne): nie zależą od prędkości $$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i\right) = 0$$
- nieholonomiczne (kinematyczne): zależą od wszystkiego $$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$
- skleronomiczne (stacjonarne): nie zależą od czasu (jawnie) $$f_p\left(x_i, y_i, z_i\right) = 0$$ $$f_p\left(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$
- reonomiczne (niestacjonarne): zależą od czasu $$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$
- dwustronne: $$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) = 0$$
- jednostronne: $$f_p\left(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\right) \geq 0$$
- idealne i rzeczywiste

Więzy idealne

Więzami idealnymi nazywamy takie więzy, dla których suma prac δL sił reakcji więzów R na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych δr jest zawsze równa zeru

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{R}}_{\mathrm{i}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0$$

Więzy rzeczywiste

Więzy rzeczywiste związane są z siłami tarcia. Siły te nie mają potencjału, rozpraszają energię układu, zatem są siłami niezachowawczymi lub dyssypacyjnymi.

Stopnie swobody

$$0 \le i = 3n - k \le 3n$$

i – liczba stopni swobody,

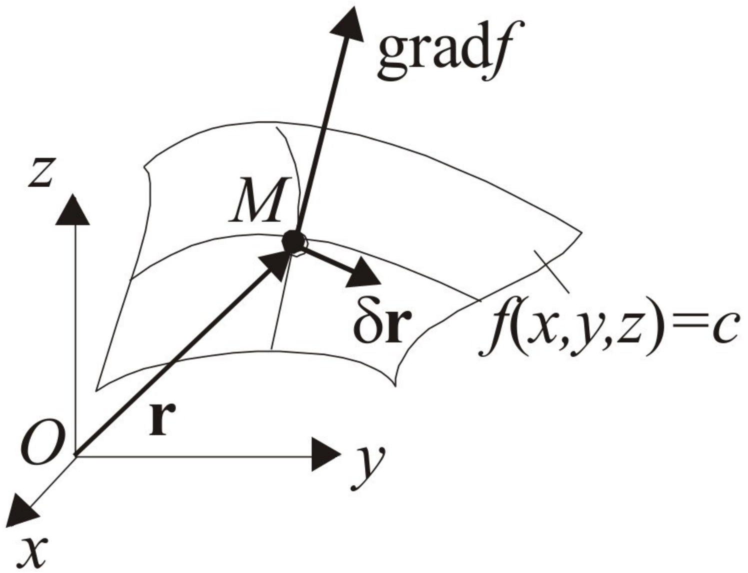
n – liczba punktów układu,

k – liczba więzów (równań więzów)

Przemieszczenia przygotowane (wirtualne)

Definicja

Dowolne, elementarne (nieskończenie małe) przesunięcie, dopuszczalne przez więzy.



Przemieszczenia przygotowane a przemieszczenia rzeczywiste???

Przemieszczenie rzeczywiste jest zawsze styczne do toru ruchu

natomiast!

może istnieć nieskończenie wiele torów ruchu (zgodnych z więzami) dla których można rozważać przemieszczenia przygotowane

Przemieszczenia przygotowane

niech punkt porusza się po powierzchni
zadanej równaniem (równanie więzów):

$$f(x, y, z, t) = 0$$

pochodna zupełna funkcji f po czasie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

albo inaczej:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{i}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Przemieszczenia przygotowane

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{r}}_\mathrm{i}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

v_i – prędkości możliwe – dopuszczalne przez więzy (dla chwili t i dla danego położenia)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{r}}_\mathrm{i}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Przemieszczenia przygotowane

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

Przemieszczenia przygotowane

Przykład:

wyznaczyć przemieszczenia przygotowane dla punktu materialnego, który ma jednocześnie pozostawać na dwóch płaszczyznach o podanych równaniach:

$$x + 3y + 4z - 10 = 0$$

$$3x + y + 7z = 0$$

Przemieszczenia przygotowane

c.d.:

$$x + 3y + 4z - 10 = 0$$

$$3x + y + 7z = 0$$

stosujemy wprowadzoną zależność:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

przemieszczenia przygotowane:

$$\delta x + 3\delta y + 4\delta z = 0$$

$$3\delta x + \delta y + 7\delta z = 0$$

Ogólne równanie dynamiki

$$m_i \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} + \vec{\mathbf{R}}_{\mathrm{i}}$$

F_i – wypadkowa sił aktywnych (czynnych),
R_i – wypadkowa sił reakcji

mnożąc przez przemieszczenia przygotowane:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}} - \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} \right) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{R}}_{\mathrm{i}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}}$$

Ogólne równanie dynamiki

jeśli więzy są idealne, to:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{R}}_{\mathrm{i}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0$$

otrzymamy:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} - m_i \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}} \right) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0}$$

Zasada prac przygotowanych

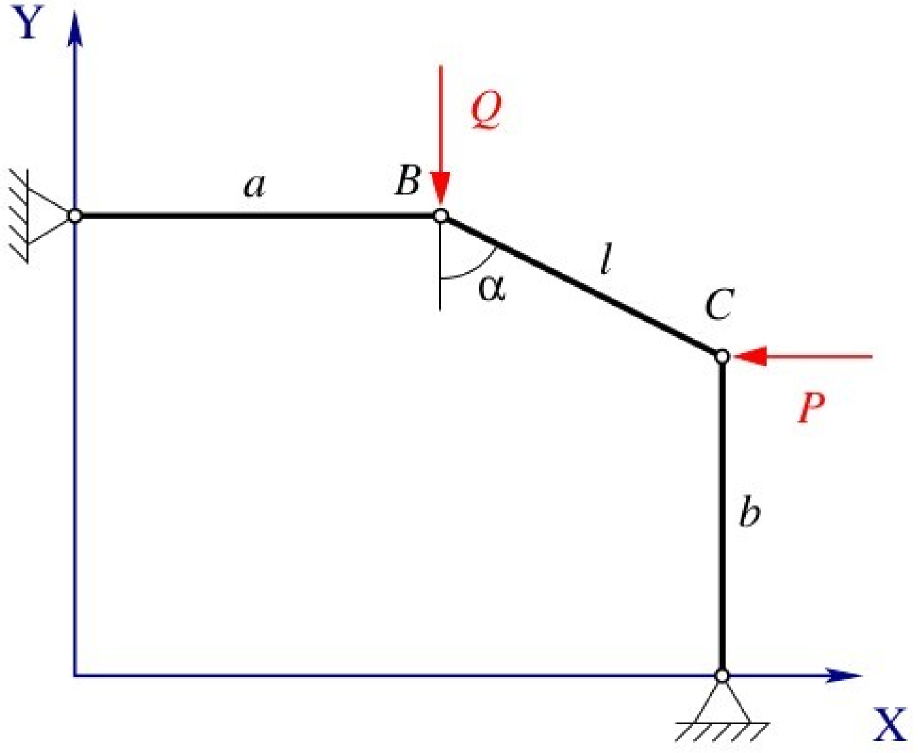
Warunkiem koniecznym i wystarczającym aby układ materialny pozostawał w równowadze jest, aby suma prac przygotowanych wszystkich sił czynnych na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych była równa zeru.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0$$

Zasada prac przygotowanych

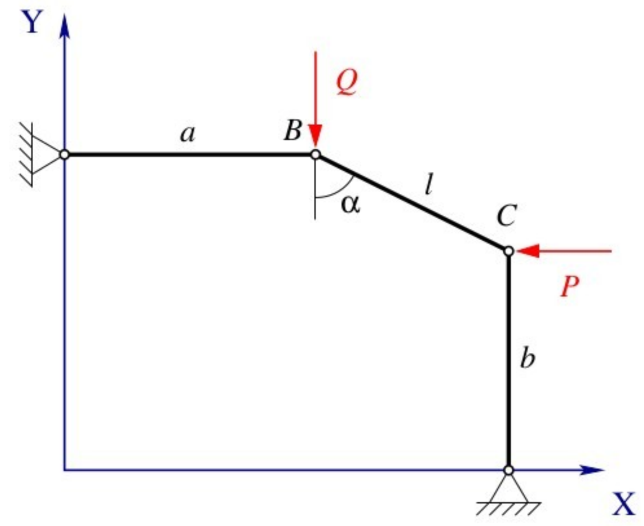
Przykład

Pomijając masy prętów znaleźć zależność między siłami P i Q w położeniu równowagi.



Zasada prac przygotowanych

Przykład



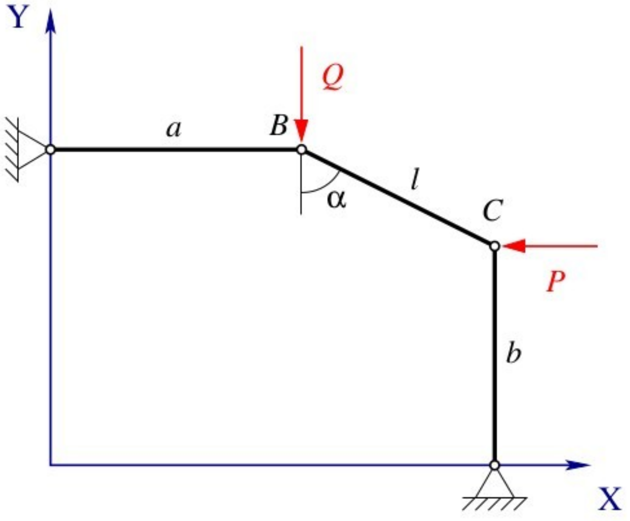
$$\delta W = -P\delta x_c - Q\delta y_b = 0$$

$$x_c = a + l\sin\alpha \qquad \delta x_c = l\cos\alpha\ \delta\alpha$$

$$y_b = b + l\cos\alpha \qquad \delta y_b = -l\sin\alpha\ \delta\alpha$$

Zasada prac przygotowanych

Przykład



$$\delta W = -P\delta x_c - Q\delta y_b = 0$$

$$x_c = a + l\sin\alpha \qquad \delta x_c = l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$y_b = b + l\cos\alpha \qquad \delta y_b = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta W = (-Pl\cos\alpha + Ql\sin\alpha)\delta\alpha = 0$$

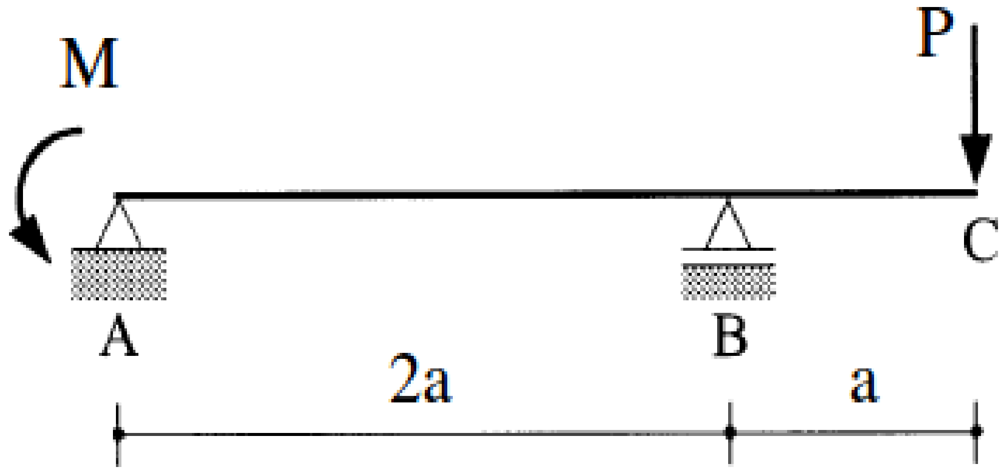
$$-Pl\cos\alpha + Ql\sin\alpha = 0$$

$$Q = P\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Zasada prac przygotowanych

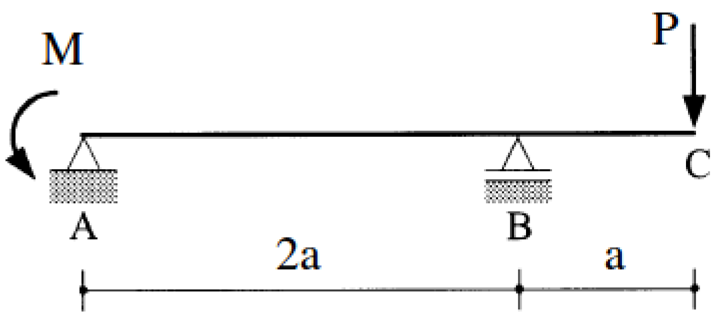
Przykład

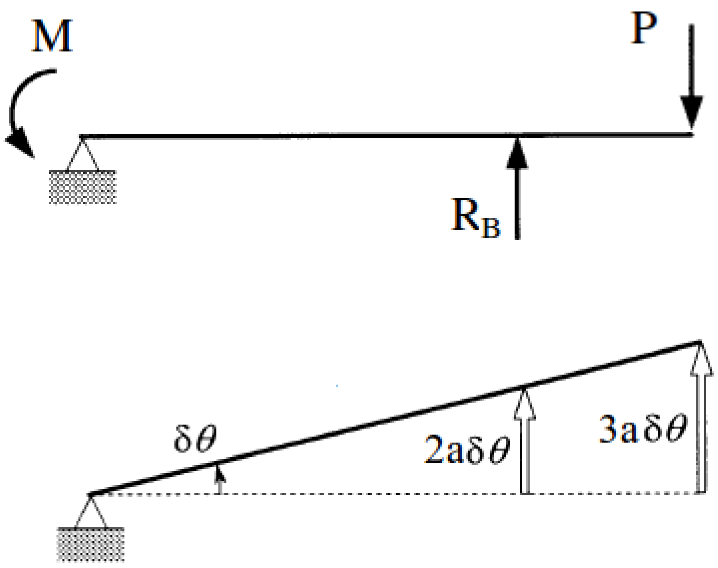
Obliczyć reakcje w podporach.



Zasada prac przygotowanych

Przykład





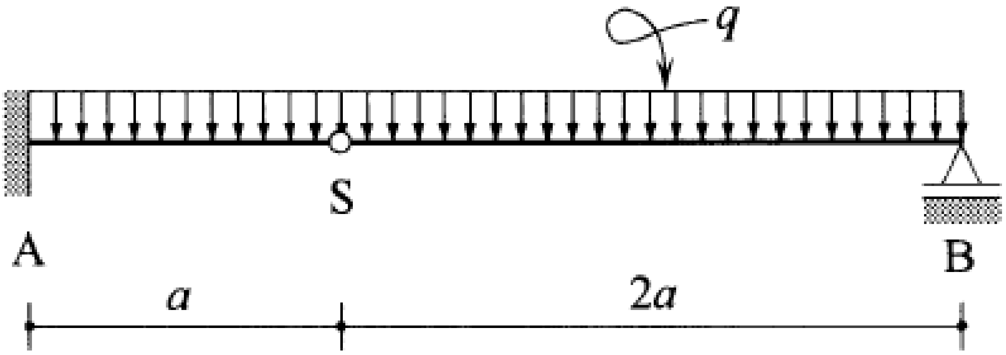
$$\delta L = +M \cdot \delta\Theta + R_B \cdot (2a\delta\Theta) - P \cdot (3a\delta\Theta) = 0$$

$$R_B = -\frac{M}{2a} + P \cdot \frac{3a}{2a}$$

Zasada prac przygotowanych

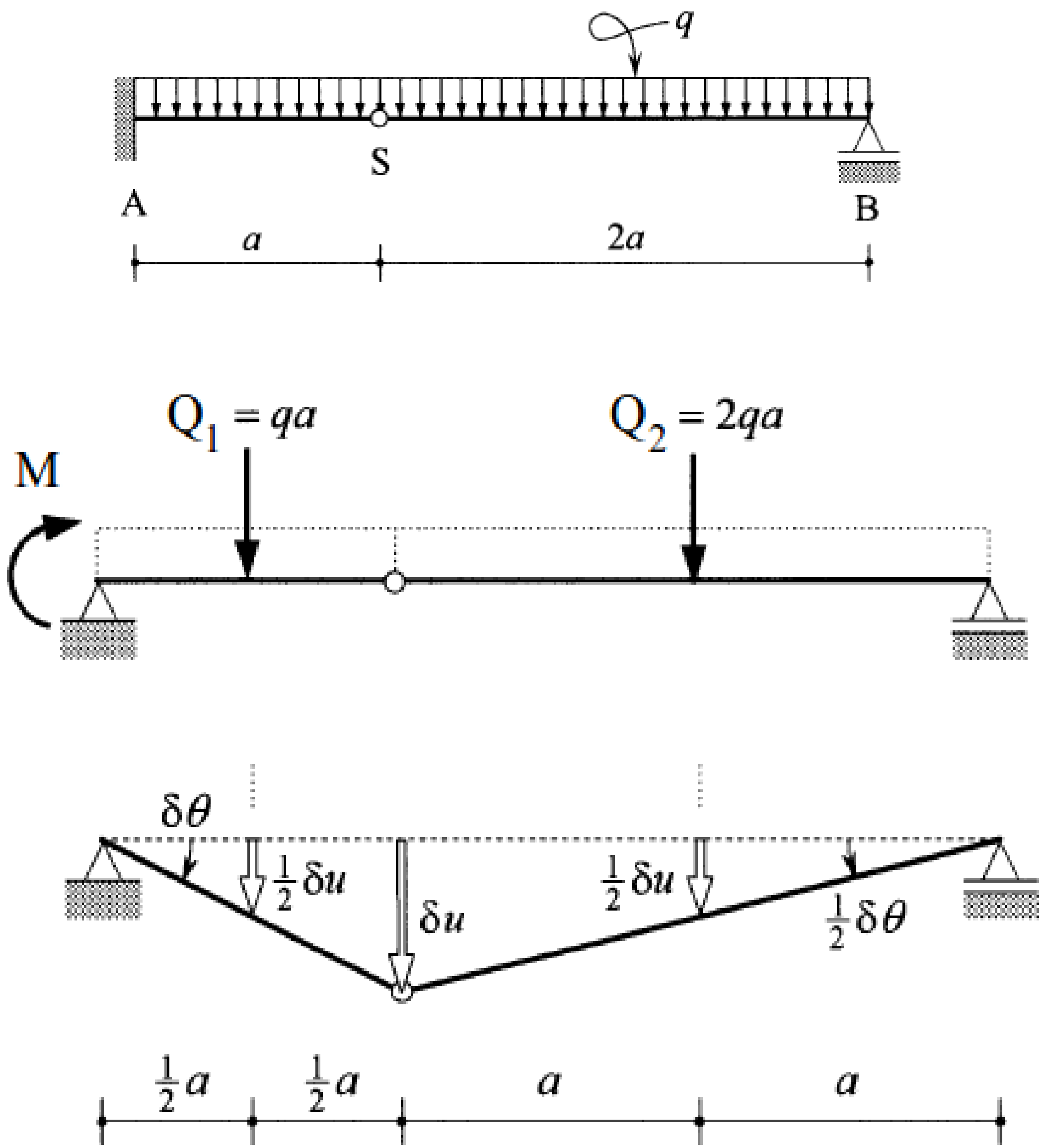
Przykład

Obliczyć moment utwierdzenia.



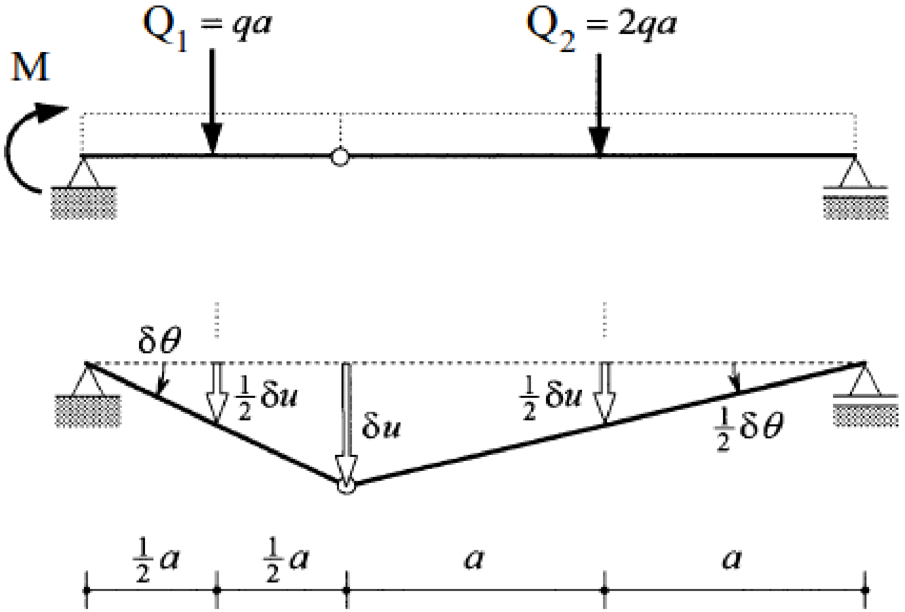
Zasada prac przygotowanych

Przykład



Zasada prac przygotowanych

Przykład



$$\delta L = +M \cdot \delta\Theta + Q_1 \cdot \frac{1}{2}\delta u + Q_2 \cdot \frac{1}{2}\delta u =$$

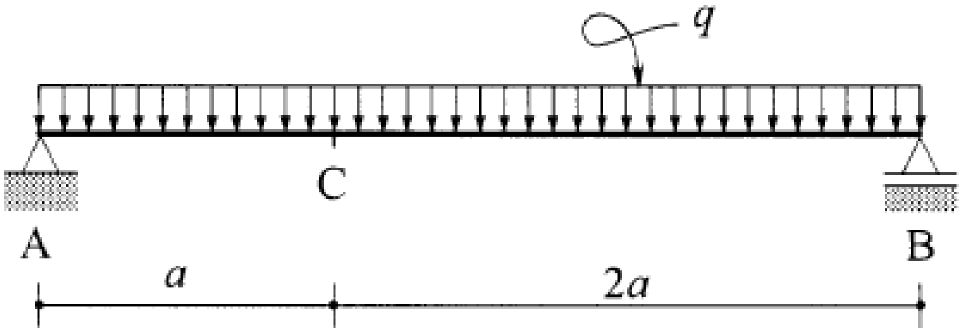
$$= +M \cdot \frac{\delta u}{a} + qa \cdot \frac{1}{2}\delta u + 2qa \cdot \frac{1}{2}\delta u = 0$$

$$M = -\frac{3}{2}qa^2$$

Zasada prac przygotowanych

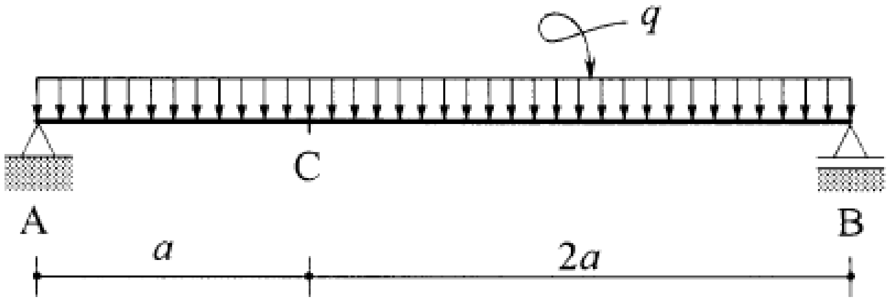
Przykład

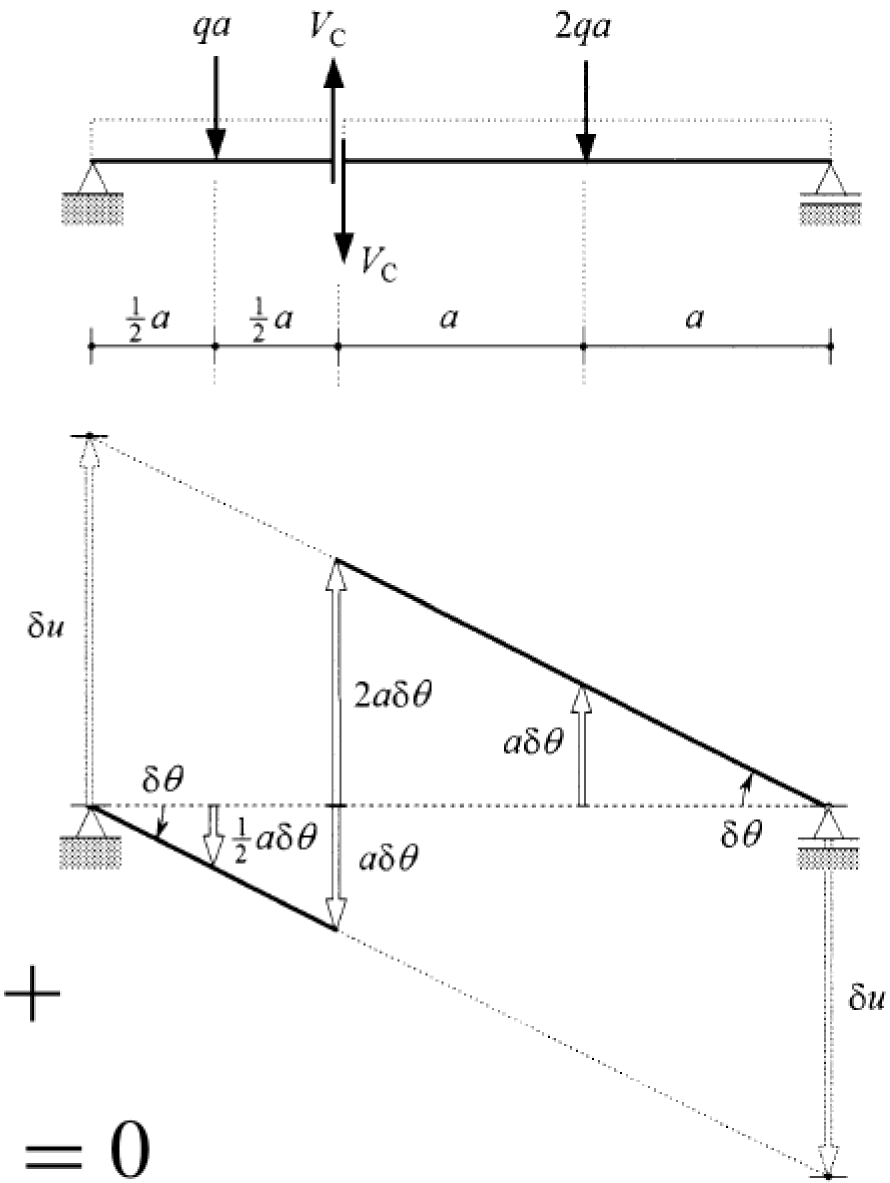
Obliczyć siły tnące w przekroju C



Zasada prac przygotowanych

Przykład





$$\delta A = -V_C \cdot a\delta\theta - V_C \cdot 2a\delta\theta +$$

$$+ qa \cdot \tfrac{1}{2}a\delta\theta - 2qa \cdot a\delta\theta = 0$$

$$V_C = -\tfrac{1}{2}qa$$

Zasada prac przygotowanych:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0}$$

Ogólne równanie dynamiki:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} - m_i \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}} \right) \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0}$$

Ogólne równanie dynamiki

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} - m_i\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}}\right)\cdot\delta\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{i}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i - m_i a_i)\cdot\delta r_i + \sum_{i=1}^{N}(M_i - I_i\varepsilon_i)\cdot\delta\varphi = 0$$